

(第2時限：100分)

2020年度 ⑤

数 学 問 題

(理 系)

(全6ページ)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙1枚・下書用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを、
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ a, b を実数とする。

〔1〕 3 次方程式 $x^3 - ax - b = 0$ の解が α, β, γ であるとするとき、

$$\alpha + \beta + \gamma = \text{ア}$$

となる。

次に、 $p = \beta + \gamma$ ， $q = \beta\gamma$ とおき、 c は β または γ を表すとするとき、

$$c^5 = \text{イ} \cdot c + \text{ウ}$$

となる。ただし、 イ ウ には p, q のみを使った式が入る。さらに、 $\alpha = -1$ ， $q = 2$ であるとするとき、 $p = \text{エ}$ ， $c = \text{オ}$ となる。
この場合、 c についての 2 次以上の次数をもつ整式は、 c の値 オ を使わずに、 c についての 1 次以下の整式で表すことができる。例えば

$$c^5 + c = \text{カ} \quad \text{や} \quad c^{15} + c = \text{キ}$$

となる。

〔2〕 曲線 $y = x^3 - ax$ と直線 $y = b$ を考えたとき、これらの曲線と直線とで囲まれる部分が存在するための必要十分条件は、 a について ク であり、かつ、 b が

$$- \text{ケ} \leq b \leq \text{ケ}$$

を満たすことである。 $b = \text{ケ}$ であるとき、囲まれた部分の図形の面積は コ となる。

Ⅱ a と t を実数とし, a は $0 < a < 1$ を満たすとする。このとき, 次の式で定められる直線 $\ell(t)$ と楕円 C を考える。

$$\ell(t) : y = ax + t$$

$$C : x^2 + \frac{y^2}{1-a^2} = 1$$

〔1〕 $\ell(t)$ と C が共有点をもつならば, 2 次方程式

$$x^2 + \boxed{\text{ア}} x + \boxed{\text{イ}} = 0$$

が実数解をもつから, $\boxed{\text{ウ}} \leq t \leq \boxed{\text{エ}}$ となる。ただし, $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ は a を含まない。

$\ell(t)$ と C が異なる 2 つの共有点をもつとき, その共有点の座標は,

$$\left(\boxed{\text{オ}} \pm \boxed{\text{カ}}, \boxed{\text{キ}} \pm a \boxed{\text{カ}} \right) \text{ (複号同順)}$$

となる。 $\ell(t)$ が C と接するのは $t = \boxed{\text{ウ}}$ と $t = \boxed{\text{エ}}$ のときである。

点 P が $\ell(\boxed{\text{ウ}})$ 上を動き, 点 Q が $\ell(\boxed{\text{エ}})$ 上を動くとき, 線分 PQ の長さの最小値は $\boxed{\text{ク}}$ となる。

〔2〕 $\ell(t)$ が C 上の点 $(0, \sqrt{1-a^2})$ を通るとき, $t = \boxed{\text{ケ}}$ となり,

$\ell(\boxed{\text{ケ}})$ と C のもう 1 つの共有点の座標は $(\boxed{\text{コ}}, \boxed{\text{サ}})$ となる。

このとき, 不等式 $y \geq ax + \boxed{\text{ケ}}$ が表す領域と楕円 C の内部との共通部分の面積を S とすると

$$a\sqrt{1-a^2} = \frac{1}{2} \text{ のとき, } S = \boxed{\text{シ}} \text{ となり,}$$

$$a\sqrt{1-a^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ かつ } a < \sqrt{1-a^2} \text{ のとき, } S = \boxed{\text{ス}} \text{ となる。}$$

Ⅲ r を正の実数, n を 2 以上の自然数とする。

[1](a) 座標平面上の点 $P(x, y)$ と x 軸の距離は $\boxed{\text{ア}}$, 点 $P(x, y)$ と y 軸の距離は $\boxed{\text{イ}}$ となる。連立不等式 $\boxed{\text{ア}} \leq r$, $\boxed{\text{イ}} \leq r$ の表す領域の面積を r を用いて表すと $\boxed{\text{ウ}}$ となる。

(b) 座標平面上において直線 $y = 0$ (x 軸) を m_0 で表す。また,

点 $Q_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 原点 O の 2 点を通る直線を m_1 ,

点 $Q_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 原点 O の 2 点を通る直線を m_2 と表す。

$i = 0, 1, 2$ について, 点 $P(x, y)$ と直線 m_i の距離を x, y を用いて表したものを d_i とする。連立不等式

$$d_0 \leq r, d_1 \leq r, d_2 \leq r$$

の表す領域の面積を r を用いて表すと $\boxed{\text{エ}}$ となる。

(c) $k = 0, \dots, n-1$ に対して, 座標平面上の点 $R_k\left(\cos \frac{k\pi}{n}, \sin \frac{k\pi}{n}\right)$ と原点 O を通る直線を m'_k で表す。点 $P(x, y)$ と直線 m'_k の距離を x, y を用いて表したものを d'_k とするとき, 連立不等式

$$d'_0 \leq r, d'_1 \leq r, \dots, d'_{n-1} \leq r$$

が表す領域の面積を r および n を用いて表すと, $\boxed{\text{オ}}$ となる。さらに,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \boxed{\text{オ}} = \boxed{\text{カ}}$$

となる。

〔2〕 $k = 0, \dots, n-1$ に対して、座標の定められた空間上の

点 $S_k \left(\cos \frac{k\pi}{n}, \sin \frac{k\pi}{n}, 0 \right)$ と原点 O を通る直線を ℓ_k で表す。点 $T(x, y, z)$

と直線 ℓ_k の距離を x, y, z を用いて表したものを e_k とするとき、連立不等式

$$e_0 \leq r, e_1 \leq r, \dots, e_{n-1} \leq r$$

を満たす点 $T(x, y, z)$ の集合が表す立体を A_n とする。 A_n 内で z 座標が最大、最小となる点をそれぞれ $T_+(x_+, y_+, z_+)$, $T_-(x_-, y_-, z_-)$ とおくと、

$$(x_+, y_+, z_+) = \boxed{\text{キ}}, (x_-, y_-, z_-) = \boxed{\text{ク}}$$

となる。 $z_- \leq t \leq z_+$ となる実数 t について、平面 $z = t$ による A_n の断面の面積を t, r および n を用いて表すと $\boxed{\text{ケ}}$ となる。よって、 A_n の体積を r および n を用いて表すと、

$$\int_{z_-}^{z_+} \boxed{\text{ケ}} dt = \boxed{\text{コ}}$$

である。さらに、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \boxed{\text{コ}} = \boxed{\text{サ}}$$

となる。

IV 袋の中に、赤玉、白玉、黒玉が1個ずつ入っているとき、次のようなゲームを考える。

袋から1個の玉を取り出す試行を1回行ったとき、取り出した玉が赤玉であれば得点を1点、白玉であれば得点を-1点、黒玉であれば得点をC点とする。ただし、 $C \geq 0$ とする。その後、玉を袋に戻して試行を終える。以上の試行を10回繰り返してゲームを終える。

k 回目の試行における得点を x_k ($k = 1, 2, \dots, 10$) と表す。

以下の表は、10回の試行のうち赤玉を5回、白玉を3回取り出した場合の得点の1つの例を表している。

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k	1	-1	1	C	1	-1	1	-1	1	C

以下、赤玉を取り出した回数を i 、白玉を取り出した回数を j とする。 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ の平均値を $M = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} x_k$ 、分散を $V = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} (x_k - M)^2$ で表し、

$Q = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} x_k^2$ とする。

[1] V は M と Q を用いて $V = \boxed{\text{ア}}$ と表される。

[2] $C = 1$ のとき、 i, j を用いて M を表すと、 $M = \boxed{\text{イ}}$ である。 $y = \frac{j}{5}$

として、 M を y を用いて表すと、 $M = \boxed{\text{ウ}}$ となる。ここで、 y は $\boxed{\text{エ}}$ 個の相異なる値をとりうる。 V を y を用いて表すと、 $V = \boxed{\text{オ}}$ となり、これは $\boxed{\text{カ}}$ 個の相異なる値をとりうる。

[3] $i = j = 3$ のときを考える。

(a) $M = 1$ となるのは, $C =$ のときである。

(b) $V = 1$ となるのは, $C =$ のときである。

(c) 実数 a について, $a \geq$ のとき $V = a$ となる C が存在するが,
 $a <$ のとき $V = a$ となる C は存在しない。 $V = a$ となる C が
存在する場合, その値を V を用いて表すと $C =$ となる。

[4] $j = 3$ のときを考える。

$M = 1$, $V = 3$ であるとき, $i =$, $C =$ となる。

