

[1] $\overline{\text{AP}} \cdot \overline{\text{BP}} = 0$ より、
 $\angle \text{APB} = 90^\circ$ または $\overline{\text{AP}} = \vec{0}$ または $\overline{\text{BP}} = \vec{0}$

よって、点 P の軌跡は線分 AB を直径とする円であり、その中心の座標 D は、

$$\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{4+8}{2}\right) = \left(\boxed{2}_{\text{ア}}, \boxed{6}_{\text{イ}}\right)$$

半径は、

$$\frac{1}{2}\text{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{(6+2)^2 + (8-4)^2} = \boxed{2\sqrt{5}}_{\text{ウ}}$$

また、このとき、 $|\overline{\text{CP}}|$ の最大値は、

$$\begin{aligned}\text{CD} + 2\sqrt{5} &= \sqrt{(2+4)^2 + (6+2)^2} + 2\sqrt{5} \\ &= \boxed{10 + 2\sqrt{5}}_{\text{エ}}\end{aligned}$$

次に、実数 t を用いると、

$$\begin{aligned}\overline{\text{OQ}} &= \overline{\text{OC}} + t\overline{\text{CD}} \\ &= \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boxed{6t-4}_{\text{オ}} \\ \boxed{8t-2}_{\text{カ}} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と表せる。

$$\overline{\text{CQ}} = \begin{pmatrix} 6t \\ 8t \end{pmatrix}$$

より、 $|\overline{\text{CP}}|$ が最大となるとき、

$$\begin{aligned}|\overline{\text{CQ}}|^2 &= (10 + 2\sqrt{5})^2 \\ 100t^2 &= 120 + 40\sqrt{5} \\ t^2 &= \frac{6 + 2\sqrt{5}}{5} \\ t &= \frac{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} \quad (\because \text{図から, } t > 0) \\ &= \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5}} = 1 + \frac{\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

したがって、このとき P の座標は、

$$\text{P}\left(\boxed{2 + \frac{6\sqrt{5}}{5}}_{\text{キ}}, \boxed{6 + \frac{8\sqrt{5}}{5}}_{\text{ク}}\right)$$

[2](a) 条件から、 $f(2) = 5, f(-2) = 21$ より、

$$\begin{aligned}-2a + b &= -3, 2a + b = 13 \\ \therefore a &= \boxed{4}_{\text{ケ}}, b = \boxed{5}_{\text{コ}}\end{aligned}$$

このとき、

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^2 - 4x + 5 \\ &= 2(x-1)^2 + 3\end{aligned}$$

より、 $0 \leq x \leq 5$ における $f(x)$ の最大値は、

$$f(5) = \boxed{35}_{\text{サ}}$$

最小値は、

$$f(1) = \boxed{3}_{\text{シ}}$$

$$(b) \ f(x) = 2\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{8} + b$$

$0 \leq x \leq 5$ における $f(x)$ の最小値を m とする。

$$(i) \ 0 \leq a < 10 \quad \text{すなわち} \quad 0 \leq \frac{a}{4} < \frac{5}{2} \text{ のとき}$$

$$m = f\left(\frac{a}{4}\right) = -\frac{a^2}{8} + b$$

より、

$$\begin{aligned}-\frac{a^2}{8} + b &= 2 \\ b &= \frac{a^2}{8} + 2\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}M = f(5) &= 2 \cdot 5^2 - a \cdot 5 + \left(\frac{a^2}{8} + 2\right) \\ &= \boxed{\frac{a^2}{8} - 5a + 52}_{\text{ス}}\end{aligned}$$

$$(ii) \ 10 \leq a < 20 \quad \text{すなわち} \quad \frac{5}{2} \leq \frac{a}{4} < 5 \text{ のとき}$$

$$m = f\left(\frac{a}{4}\right) \text{ より, (i) と同様にして,}$$

$$b = \frac{a^2}{8} + 2$$

よって、

$$\begin{aligned}M = f(0) &= b \\ &= \boxed{\frac{a^2}{8} + 2}_{\text{セ}}\end{aligned}$$

$$(iii) \ 20 \leq a \quad \text{すなわち} \quad 5 \leq \frac{a}{4} \text{ のとき}$$

$$m = f(5) = 50 - 5a + b$$

より、

$$\begin{aligned}50 - 5a + b &= 2 \\ b &= 5a - 48\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}M = f(0) &= b \\ &= \boxed{5a - 48}_{\text{ソ}}\end{aligned}$$

$$(a) \ x^2 - (2a+1)x + a^2 + a < 0 \text{ を解くと,}$$

$$x^2 - (2a+1)x + a(a+1) < 0$$

$$(x-a)\{x-(a+1)\} < 0$$

$$\boxed{a}_{\text{タ}} < x < \boxed{a+1}_{\text{チ}}$$

$$3^x \times 9 < 3^{x^2} \times 27^x \times \frac{1}{3} \text{ を解くと,}$$

$$3^x \times 3^2 < 3^{x^2} \times 3^{3x} \times 3^{-1}$$

$$3^{x+2} < 3^{x^2+3x-1}$$

底 $3 > 1$ より、

$$x + 2 < x^2 + 3x - 1$$

$$x^2 + 2x - 3 > 0$$

$$(x+3)(x-1) > 0$$

$$x < \boxed{-3}_{\text{ツ}}, \boxed{1}_{\text{テ}} < x$$

$$\log_3(x+1) + \log_{\frac{1}{3}}(3-x) > 1 \quad \cdots \cdots \text{①} \quad \text{を考えると,}$$

真数条件より、

$$x + 1 > 0 \quad \text{かつ} \quad 3 - x > 0$$

$$\therefore -1 < x < 3 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

このもとで①を解くと、

$$\log_3(x+1) + \frac{\log_3(3-x)}{\log_3\frac{1}{3}} > 1$$

$$\log_3(x+1) > \log_3(3-x) + \log_3 3$$

$$\log_3(x+1) > \log_3 3(3-x)$$

底 $3 > 1$ より、

$$x + 1 > 3(3-x)$$

$$x > 2$$

よって、

$$\boxed{2}_{\text{ト}} < x < \boxed{3}_{\text{タ}}$$

$$(b) \text{ 条件 P, Q, R を表す集合をそれぞれ, } p, q, r \text{ とする.}$$

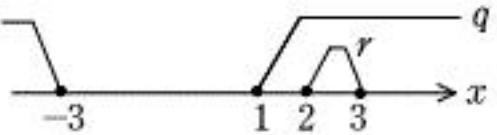
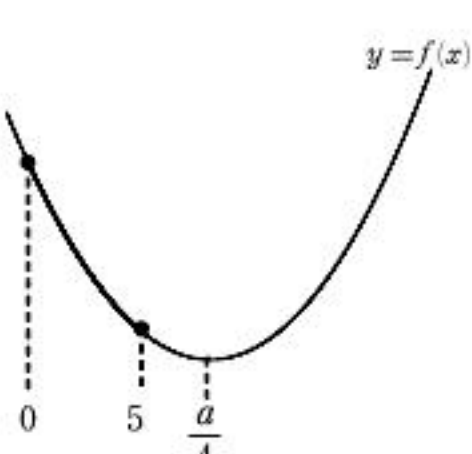
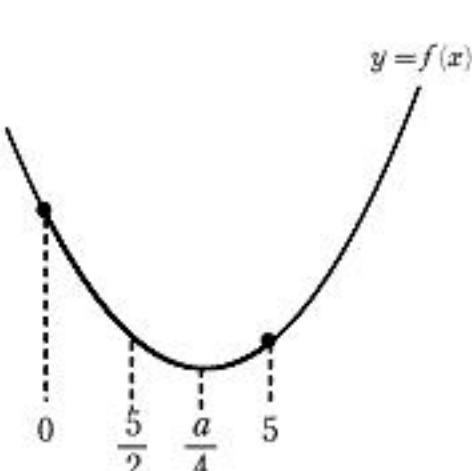
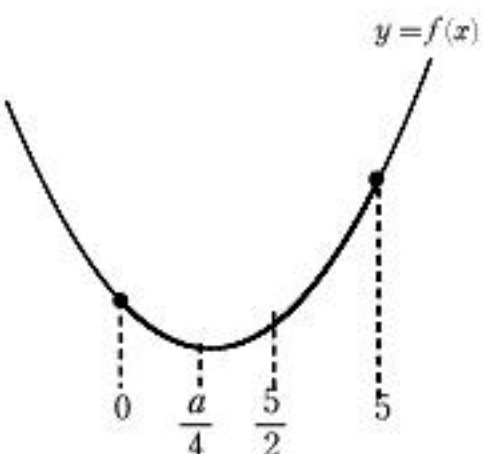
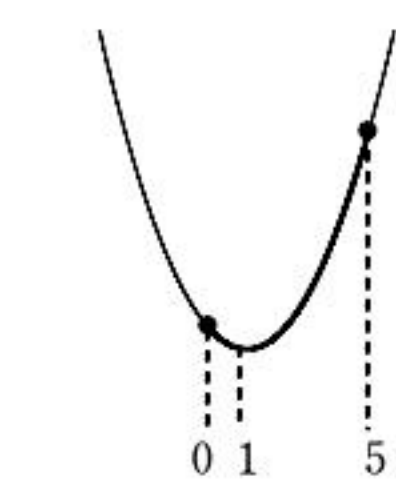
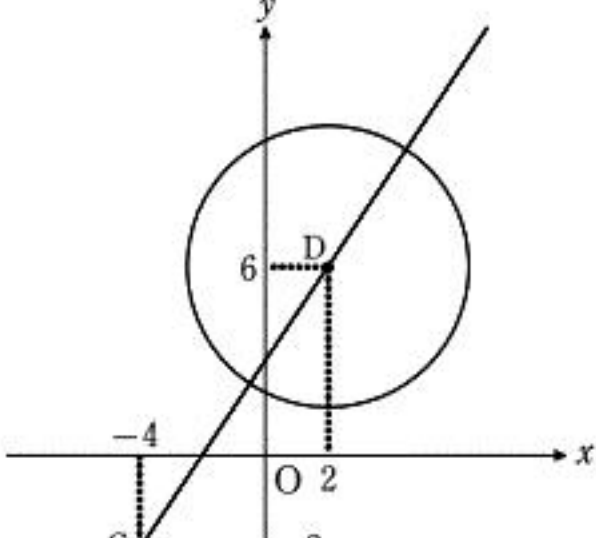
P が R の必要十分条件であるとき、 $p = r$ だから、

$$a = 2 \quad \text{かつ} \quad a + 1 = 3$$

$$a = \boxed{2}_{\text{ニ}}$$

また、 $q \supset r$ より、Q は R であるための必要条件であるが、

$$\text{十分条件ではない} \left(\boxed{\quad}_{\text{ハ}} \right).$$



[1] 平均値は,

$$\frac{1}{10}(50+66+75+2+60+2+69+80+4+72)=\boxed{48}_{\text{ア}}$$

小さい順に並べると,

$$2 \quad 2 \quad 4 \quad 50 \quad 60 \quad 66 \quad 69 \quad 72 \quad 75 \quad 80$$

となるから, 中央値は,

$$\frac{60+66}{2}=\boxed{63}_{\text{イ}}$$

四分位偏差は,

$$\frac{72-4}{2}=\boxed{34}_{\text{ウ}}$$

また, 分散は,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{10}\{(50-48)^2+(66-48)^2+(75-48)^2+(2-48)^2+(60-48)^2 \\ & \quad +(2-48)^2+(69-48)^2+(80-48)^2+(4-48)^2+(72-48)^2\} \\ & =\frac{1}{10}(4+324+729+2116+144+2116+441+1024+1936+576) \\ & =941 \end{aligned}$$

より, 標準偏差は, $\boxed{\sqrt{941}}_{\text{エ}}$

[2](a) 「前日の睡眠時間が7時間以上」のグループのうち,

ストレスレベルが50以下の人数は, 少なくとも

$$200 \div 4 \times 3 = \boxed{150}_{\text{オ}} \text{ (人)}$$

「前日の睡眠時間が7時間未満」のグループのうち,

ストレスレベルが90以上の人数は, 少なくとも $\boxed{1}_{\text{カ}}$ 人.

(b) 命題Pは真

命題(i)は逆で偽だから, $\boxed{②}_{\text{キ}}$

命題(ii)は対偶で真だから, $\boxed{⑤}_{\text{ク}}$

命題(iii)は裏で偽だから, $\boxed{④}_{\text{ケ}}$

[1] $y = x^2 - 2x + 2$ より,
 $y' = 2x - 2$

よって, $A(\alpha, \alpha^2 - 2\alpha + 2)$ における接線の方程式は,

$$y = (2\alpha - 2)(x - \alpha) + \alpha^2 - 2\alpha + 2$$

$$\therefore y = 2(\alpha - 1)x - \alpha^2 + 2$$

これが $P(t, 0)$ を通るから,

$$0 = 2(\alpha - 1)t - \alpha^2 + 2$$

$$\alpha^2 - 2t\alpha + 2t - 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots (\text{答})$$

とわかる.

[2] 直線 AB の傾きは,

$$\frac{(\beta^2 - 2\beta + 2) - (\alpha^2 - 2\alpha + 2)}{\beta - \alpha} = \frac{\beta^2 - \alpha^2 - 2(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha}$$

$$= \alpha + \beta - 2$$

よって, 直線 AB の方程式は, α, β を用いて表すと,

$$y = (\alpha + \beta - 2)(x - \alpha) + \alpha^2 - 2\alpha + 2$$

$$\therefore y = (\alpha + \beta - 2)x - \alpha\beta + 2$$

ここで, [1]と同様にして,

$$\beta^2 - 2t\beta + 2t - 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

が成り立つから, ①, ②より, α, β は X の方程式

$$X^2 - 2tX + 2t - 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

の 2 解である.

よって, 解と係数の関係より,

$$\alpha + \beta = 2t, \alpha\beta = 2t - 2 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

であるから, 直線 AB の方程式は, t を用いて表すと,

$$y = (2t - 2)x - 2t + 4 \quad \dots\dots (\text{答})$$

[3] $y = (2t - 2)x - 2t + 4$ を変形すると,

$$(2x - 2)t - 2x - y + 4 = 0$$

となるから, 直線 AB が t の値に関わらず通る定点の座標は,

$$2x - 2 = 0, -2x - y + 4 = 0$$

を解くことにより,

$$(1, 2) \quad \dots\dots (\text{答})$$

とわかる.

[4]

$$S_1 = \int_{\alpha}^{\beta} \{(\alpha + \beta - 2)x - \alpha\beta + 2 - (x^2 - 2x + 2)\} dx$$

$$= -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx$$

$$= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

よって, $S_1 = \frac{9}{2}$ のとき,

$$\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{9}{2}$$

$$\beta - \alpha = 3$$

ここで, ④より,

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= (2t)^2 - 4(2t - 2)$$

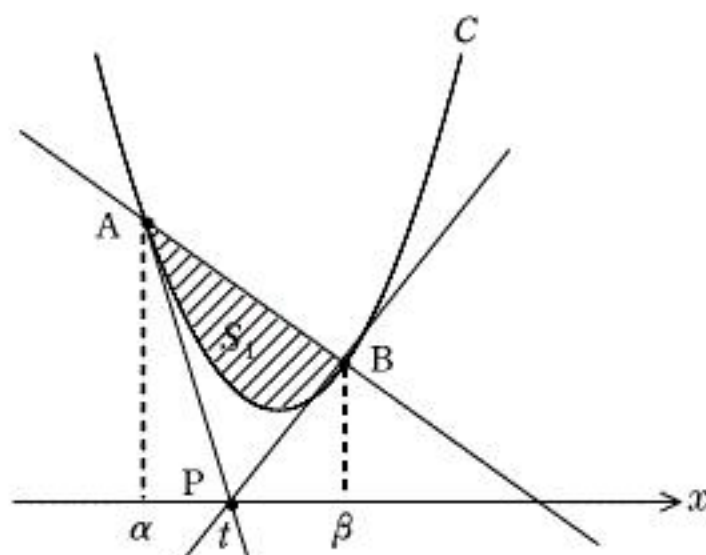
$$= 4t^2 - 8t + 8$$

であるから,

$$4t^2 - 8t + 8 = 3^2$$

$$4t^2 - 8t - 1 = 0$$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \dots\dots (\text{答})$$



[5]

$$S_2 = \int_{\alpha}^t \{x^2 - 2x + 2 - (2(\alpha - 1)x - \alpha^2 + 2)\} dx$$

$$+ \int_t^{\beta} \{x^2 - 2x + 2 - (2(\beta - 1)x - \beta^2 + 2)\} dx$$

$$= \int_{\alpha}^t (x - \alpha)^2 dx + \int_t^{\beta} (x - \beta)^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3 \right]_{\alpha}^t + \left[\frac{1}{3}(x - \beta)^3 \right]_t^{\beta}$$

$$= \frac{1}{3}(t - \alpha)^3 - \frac{1}{3}(t - \beta)^3$$

ここで, ③を解くことにより,

$$\alpha = t - \sqrt{t^2 - 2t + 2}, \beta = t + \sqrt{t^2 - 2t + 2}$$

であるから,

$$S_2 = \frac{2}{3}(\sqrt{t^2 - 2t + 2})^3$$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{(t - 1)^2 + 1})^3$$

よって, $t = 1$ のとき $(t - 1)^2 + 1$ は最小値 1 をとり,

このとき S_2 も最小となるから, その値は,

$$\frac{2}{3}(\sqrt{1})^3 = \frac{2}{3} \quad \dots\dots (\text{答})$$

