

【解答】

[1]	$\overline{\text{ア}}$	$\overline{\text{イ}}$				
	$-2p^3+3p^2$	$6p^2(1-p)^2$				
[2]	$\overline{\text{ウ}}$	$\overline{\text{エ}}$				
	$2p^2-2p+1$	$(1-p)(4p^2-2p+1)$				
[3]	$\overline{\text{オ}}$	$\overline{\text{カ}}$	$\overline{\text{キ}}$	$\overline{\text{ク}}$	$\overline{\text{ケ}}$	$\overline{\text{コ}}$
	Y_4Y_1	$Y_3Y_2(Y_1)^3$	$4p^3-6p^2+3p$	$2p(1-p)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\ell(\ell+1)$

【解説】

[1]

X_3 が正となるのは3回のコイン投げのうち、すべて表が出る場合か、表が2回と裏が1回出る場合である。よって X_3 が正である確率は、

$$p^3+_3C_2\cdot p^2(1-p)=-2p^3+3p^2$$

である。 $X_4=0$ となるのは4回のコイン投げのうち表が2回、裏が2回出る場合である。よって $X_4=0$ である確率は、

$$_4C_2\cdot p^2(1-p)^2=6p^2(1-p)^2$$

である。

[2]

$Y_n=X_n-X_{n-1}$ という定義より、 Y_n は1つ前からの点数の変化、すなわち n 回目の試行でコインが表か裏かを示している。よって Y_1 と Y_2 の積が1となるのは、 $Y_1=Y_2=1$ または $Y_1=Y_2=-1$ 、すなわち1回目のコイン投げと2回目のコイン投げのどちらも表が出る場合か、1回目のコイン投げと2回目のコイン投げのどちらも裏が出る場合である。よって Y_1 と Y_2 の積が1である確率は、

$$p^2+(1-p)^2=2p^2-2p+1$$

である。また Y_1 と Y_2 と Y_3 の積が-1となる (Y_1, Y_2, Y_3) の組み合わせは

$$(Y_1, Y_2, Y_3)=(-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (-1, -1, -1)$$

の4通りが考えられる。それぞれに対応する表裏の出方を考えると、3回のコイン投げのうち表が2回と裏が1回出る場合か、すべて裏が出る場合となる。よって Y_1 と Y_2 と Y_3 の積が-1である確率は、

$$\begin{aligned} _3C_2\cdot p^2(1-p)+(1-p)^3 &= (1-p)(3p^2+p^2-2p+1) \\ &= (1-p)(4p^2-2p+1) \end{aligned}$$

である。

[3]

自然数を2進法で表すとき、

$$9=1001_{(2)}$$

$$1=1_{(2)}$$

$$3=11_{(2)}$$

$$5=101_{(2)}$$

であるから、

$$Z_9=Y_4Y_1$$

$$Z_1Z_3Z_5=Y_1\cdot Y_2Y_1\cdot Y_3Y_1$$

$$=Y_3Y_2(Y_1)^3$$

$$=Y_1Y_2Y_3\ (\because Y_1=\pm 1)$$

である。また $7=111_{(2)}$ より $Z_7=Y_3Y_2Y_1$ であるから $Z_7=1$ となる場合は(2)と同様に考えると、3回のコイン投げのうちすべて表が出る場合か、表が1回と裏が2回出る場合である。よって $Z_7=1$ である確率は、

$$p^3+_3C_1\cdot p(1-p)^2=4p^3-6p^2+3p$$

である。さらに $17=10001_{(2)}$ より $Z_{17}=Y_5Y_1$ であるから $Z_{17}=-1$ となるのは、1回目のコイン投げと5回目のコイン投げのうち一方で表が出て、もう一方で裏が出る場合である。よって $Z_{17}=-1$ である確率は、

$$_2C_1\cdot p(1-p)=2p(1-p)$$

である。次に $4p^3-6p^2+3p=\frac{1}{2}$ となるとき、

$$4p^3-6p^2+3p=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 8p^3-12p^2+6p-1=0$$

$$\Leftrightarrow (2p-1)(4p^2-4p+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (2p-1)^2=0$$

$$\therefore p=\frac{1}{2}$$

である。ここで、任意の自然数 m に対して Z_m は $Z_m=Y_{i_j}Y_{i_{j-1}}\cdots Y_{i_1}$ と表わせる。このとき j は自然数であり、自然数列 $\{i_j, i_{j-1}, \cdots, i_1\}$ は j 個の互いに異なる要素からなるものとする。ここ

で、任意の自然数 m に対して $Z_m=1$ である確率が $\frac{1}{2}$ であることを示す。 $Z_m=1$ となるとき、 $Y_{i_j}, Y_{i_{j-1}}, \cdots, Y_{i_1}$ のうち-1をとるものの個数は偶数であり、この個数を0以上の整数 k を用いて $2k$ とする。

[1] j が偶数のとき

$0\leq 2k\leq j$ を満たすすべての k について $Z_m=1$ となる確率を足し合わせると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\frac{j}{2}}{}_jC_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-2k} &= \left(\frac{1}{2}\right)^j\sum_{k=0}^{\frac{j}{2}}{}_jC_{2k} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^j\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=0}^j\left(1+(-1)^k\right){}_jC_k \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^j\cdot\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=0}^j{}_jC_k\cdot 1^k\cdot 1^{j-k}+\sum_{k=0}^j{}_jC_k(-1)^k\cdot 1^{j-k}\right\} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^j\cdot\frac{1}{2}\{(1+1)^j+(-1+1)^j\} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

[2] j が奇数のとき

$0\leq 2k\leq j$ を満たすすべての k について $Z_m=1$ となる確率を足し合わせると、[1]と同様にして、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\frac{j-1}{2}}{}_jC_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-2k} &= \left(\frac{1}{2}\right)^j\sum_{k=0}^{\frac{j-1}{2}}{}_jC_{2k} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^j\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{j-1}\left(1+(-1)^k\right){}_jC_k \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^j\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=0}^j\left(1+(-1)^k\right){}_jC_k \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

以上[1], [2]より任意の自然数 m に対して $Z_m=1$ である確率が $\frac{1}{2}$ であることが示された。した

がって、 $Z_m=1$ である確率が $\frac{1}{2}$ であるような m を一番小さいものから順に並べて ℓ 番目までを足したときの和は

$$\sum_{m=1}^{\ell}m=\frac{1}{2}\ell(\ell+1)$$

となる。

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{c}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{c}$	r	r	r	$a-r\left(1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)$	$\frac{1}{4}$
サ	シ	ス	セ	ソ					
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{3+\sqrt{3}}$					

【解説】

$$\begin{aligned} \vec{n} \perp \overline{AB} \text{ より} \\ \vec{n} \cdot \overline{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow -a + bs &= 0 \\ \therefore s &= \frac{a}{b} \quad (\because b \neq 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{であり, } \vec{n} \perp \overline{AC} \text{ より} \\ \vec{n} \cdot \overline{AC} &= 0 \\ \Leftrightarrow -a + ct &= 0 \\ \therefore t &= \frac{a}{c} \quad (\because c \neq 0) \end{aligned}$$

である。平面 α 上の任意の点 R の座標を (x, y, z) とするとき $\overline{RA} = (-x + a, -y, -z)$ であるから、 $\vec{n} \perp \overline{RA}$ より、 x, y, z は

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \overline{RA} &= 0 \\ \Leftrightarrow -x + a - \frac{a}{b}y - \frac{a}{c}z &= 0 \\ \therefore \frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{1}{c}z &= 1 \quad (\because a \neq 0) \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

の関係式を満たす。内接球は xy 平面、 yz 平面、 zx 平面のそれぞれに接するから、内接球の半径を $r (r > 0)$ とすると、球の中心 P の座標は、 (r, r, r) となる。四面体 OABC に内接する

球と三角形 ABC との接点を $Q(x_1, y_1, z_1)$ とすると、 $\overline{PQ}$ は $\vec{n}$ と並行であるので、

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= k\vec{n} \quad (k > 0) \text{ を満たす。よって、} \\ (x_1 - r, y_1 - r, z_1 - r) &= k\left(1, \frac{a}{b}, \frac{a}{c}\right) \\ \Leftrightarrow (x_1, y_1, z_1) &= \left(r + k, r + \frac{a}{b}k, r + \frac{a}{c}k\right) \end{aligned}$$

である。点 Q は平面 α 上の点であるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}x_1 + \frac{1}{b}y_1 + \frac{1}{c}z_1 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{r+k}{a} + \frac{br+ak}{b^2} + \frac{cr+ak}{c^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow k\left(1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2}\right) &= a - r\left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\right) \\ \therefore k &= \frac{a - r\left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\right)}{1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2}} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が得られる。①と

$$|\overline{PQ}| = r \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

であることより r が得られる。例えば、 $a=1, b=1, c=2$ のとき、②より

$$\begin{aligned} k &= \frac{1 - r\left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right)}{1 + 1 + \frac{1}{4}} \\ &= \frac{4 - 10r}{9} \end{aligned}$$

である。また③より

$$\begin{aligned} |\overline{PQ}|^2 &= r^2 \\ \Leftrightarrow k^2\left(1 + 1 + \frac{1}{4}\right) &= r^2 \\ \Leftrightarrow k^2 &= \frac{4}{9}r^2 \end{aligned}$$

であり、 $k > 0, r > 0$ より

$$k = \frac{2}{3}r$$

と求まる。これらを連立して k を消去すると、

$$\begin{aligned} \frac{4 - 10r}{9} &= \frac{2}{3}r \\ \Leftrightarrow 4 - 10r &= 6r \\ \therefore r &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。また $a=b=c=1$ であるとき、 $\vec{n}=(1, 1, 1)$ であり、原点から平面 α に下した垂線と平面 α との交点を H とすると、 $\overline{OH}$ は $\vec{n}$ と平行であるから、 $\overline{OH} = m\vec{n} \ (m > 0)$ を満たす。よって点 H の座標は (m, m, m) と表わせる。また点 H は平面 α 上の点であり、①より

$$\begin{aligned} m + m + m &= 1 \\ \therefore m &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

と分かる。よって点 H の座標は $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ である。よって

$$|\overline{OH}| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

である。また、②より

$$k = \frac{1 - 3r}{3}$$

であり、 $\overline{PQ} = k\vec{n}$ であることと③より

$$\begin{aligned} |\overline{PQ}|^2 &= r^2 \\ \Leftrightarrow 3k^2 &= r^2 \\ \Leftrightarrow k^2 &= \frac{1}{3}r^2 \end{aligned}$$

であり、 $k > 0, r > 0$ より

$$k = \frac{\sqrt{3}}{3}r$$

と分かる。これらを連立して k を消去すると、

$$\begin{aligned} \frac{1 - 3r}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{3}r \\ \Leftrightarrow (3 + \sqrt{3})r &= 1 \\ \therefore r &= \frac{1}{3 + \sqrt{3}} \end{aligned}$$

である。

III

【解答】

〔1〕	ア	イ	ウ
	1	k	$n!$
〔2〕	エ	オ	
	0	1	
〔3〕	カ	キ	
	$n^n e^{-n+1}$	$(n+1)^{n+1} e^{-n}$	
〔4〕	ク		
	-1		

【解説】

〔1〕

$f_1(x)=0$ より

$$\int_0^1 f_1(x) dx = 0$$

$$\begin{aligned}\exp\left(\int_0^1 f_1(x) dx\right) &= e^0 \\ &= 1\end{aligned}$$

である。また $f_k(x)=\log k$ より

$$\begin{aligned}\int_{k-1}^k f_k(x) dx &= [(\log k)x]_{k-1}^k \\ &= \log k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\exp\left(\int_{k-1}^k f_k(x) dx\right) &= e^{\log k} \\ &= k\end{aligned}$$

である。また、2 以上の自然数 n について

$$\begin{aligned}\exp\left(\sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f_k(x) dx\right) &= \exp\left(\sum_{k=1}^n \log k\right) \\ &= e^{\log 1 + \log 2 + \cdots + \log n} \\ &= e^{\log(1 \cdot 2 \cdots n)} \\ &= e^{\log n!} \\ &= n!\end{aligned}$$

である。

〔2〕

y を定数とすると、2 以上のすべての自然数 k に対して、 x についての関数 $z=\log(x+y)$ ($k-1 \leq x \leq k$) は $x=k$ のとき最大値 $z=\log(k+y)$ をとる。よって $k-1 \leq x \leq k$ を満たすすべての x に対して

$$\begin{aligned}\log(x+y) &\leq f_k(x) \\ \Leftrightarrow \log(x+y) &\leq \log k\end{aligned}$$

を常に満たす y の最大値 a について

$$\log k = \log(k+a)$$

が成り立つ。したがって

$$a=0$$

である。またすべての自然数 k に対して、 $z=\log(x+y)$ ($k-1 \leq x \leq k$) は $x=k-1$ のとき最小値 $z=\log(k+y-1)$ をとる。よって $k-1 \leq x \leq k$ を満たすすべての x に対して

$$\begin{aligned}f_k(x) &\leq \log(x+y) \\ \Leftrightarrow \log k &\leq \log(x+y)\end{aligned}$$

を常に満たす y の最小値 b について

$$\log k = \log(k+b-1)$$

が成り立つ。したがって

$$b=1$$

である。

〔3〕

$[0, \infty)$ 上の関数 $g(x), h(x)$ を

$$\begin{aligned}g(x) &= \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1) \\ \log x & (x > 1) \end{cases} \\ h(x) &= \log(x+1) \quad (x \geq 0)\end{aligned}$$

と定めると、

$$\begin{aligned}\int_0^n g(x) dx &= \int_0^1 g(x) dx + \int_1^n g(x) dx \\ &= \int_0^1 0 \cdot dx + \int_1^n \log x dx \\ &= 0 + [x \log x - x]_1^n \\ &= n \log n - n + 1\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}\exp\left(\int_0^n g(x) dx\right) &= e^{n \log n - n + 1} \\ &= e^{\log n^n} \cdot e^{-n+1} \\ &= n^n e^{-n+1}\end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned}\int_0^n h(x) dx &= \int_0^n \log(x+1) dx \\ &= \int_0^n (x+1)' \log(x+1) dx \\ &= [(x+1) \log(x+1)]_0^n - \int_0^n (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} dx \\ &= (n+1) \log(n+1) - [x]_0^n \\ &= (n+1) \log(n+1) - n\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}\exp\left(\int_0^n h(x) dx\right) &= e^{\{n+1\} \log(n+1) - n} \\ &= e^{\log(n+1)^{n+1}} \cdot e^{-n} \\ &= (n+1)^{n+1} e^{-n}\end{aligned}$$

である。

〔4〕

$$\begin{aligned}n^p \frac{(n+1)^{n+1} e^{-n}}{n^n e^{-n+1}} &= n^{p+1} \frac{(n+1)^{n+1} e^{-n}}{n^{n+1} e^{-n+1}} \\ &= n^{p+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{e} \\ &= n^{p+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{e}\end{aligned}$$

であり、自然対数の底 e の定義より

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) &= 1\end{aligned}$$

であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{p+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{e} = 1$ を満たすには

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n^{p+1} &= 1 \\ \Leftrightarrow p+1 &= 0 \\ \therefore p &= -1\end{aligned}$$

であればよい。

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$	1	0	1	$\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$	$\frac{1}{(1-y^2)\sqrt{1-y^2}}$	$-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$	-1

〔解説〕

関数 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ ($x \geq 0$) の第1次導関数と第2次導関数は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x) &= \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ \frac{d^2}{dx^2}f(x) &= \frac{1}{1+x^2} \left(\sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \\ &= \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

である。このとき

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d}{dx}f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} \\ &= 1 \qquad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。関数 $f(x)$ の第2次導関数が正なので、 $\frac{d}{dx}f(x)$ は単調に増加する。したがって

$$y = \frac{d}{dx}f(x) \quad (x > 0)$$

とおいたとき、

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +0} y &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= 0\end{aligned}$$

であり、①と合わせると、 y の値域は

$$0 < y < 1$$

となる。さらに $\frac{d}{dx}f(x) = y$ を y について解き、 $x = g(y)$ とおく。このとき、

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = y$$

より

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{1+x^2} &= y^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= (1+x^2)y^2 \\ \Leftrightarrow x^2(1-y^2) &= y^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{y^2}{1-y^2} \quad (\because 1-y^2 \neq 0) \\ \therefore g(y) &= \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \quad (\because x > 0, 0 < y < 1)\end{aligned}$$

であり、この第1次導関数は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}g(y) &= \frac{1}{1-y^2} \left(\sqrt{1-y^2} + y \cdot \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \right) \\ &= \frac{1}{(1-y^2)\sqrt{1-y^2}}\end{aligned}$$

である。関数 $h(y)$ を

$$\begin{aligned}h(y) &= f(g(y)) - yg(y) \\ &= \sqrt{1 + \frac{y^2}{1-y^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} \\ &= \frac{1-y^2}{\sqrt{1-y^2}} \\ &= \sqrt{1-y^2} \quad (0 < y < 1)\end{aligned}$$

とおくと、その第1次導関数は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}h(y) &= \frac{1}{2}(1-y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-y^2)' \\ &= -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\end{aligned}$$

となる。 $y = \frac{d}{dx}f(x)$ であるとき、

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dy^2}h(y) &= -\frac{1}{1-y^2} \left(\sqrt{1-y^2} + y \cdot \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \right) \\ &= -\frac{1}{(1-y^2)\sqrt{1-y^2}}\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2}{dx^2}f(x) \right) \left(\frac{d^2}{dy^2}h(y) \right) &= -\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{(1-y^2)\sqrt{1-y^2}} \\ &= -\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{1+x^2}\right)\sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^2}}} \\ &= -\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{1+x^2}\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}} \\ &= -1\end{aligned}$$

となる。