

(第 3 時限：100分)

2021年度 ③

数 学 問 題

(理 系)

(全 5 ページ)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙 1 枚・下書用紙 2 枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを、
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ コインを投げて表が出たら1点、裏が出たら-1点とするゲームを考える。自然数 n に対し、 X_n はこのルールの下での n 回のコイン投げによる点数の合計を表すものとする。ゲームを始めるときの点数は0点とし、 $X_0 = 0$ とおく。なお、このコイン投げでは表が出る確率は p ($0 < p < 1$) とする。

〔1〕 X_3 が正である確率は ア であり、 $X_4 = 0$ である確率は イ である。

〔2〕 自然数 n に対し、 $Y_n = X_n - X_{n-1}$ とおく。 Y_1 と Y_2 の積が1である確率は ウ であり、 Y_1 と Y_2 と Y_3 の積が-1である確率は エ である。

〔3〕 自然数 m を2進法で表現したとき、 m は、数字0と1を用いて表すことができる。例えば、 $3 = 11_{(2)}$ 、 $6 = 110_{(2)}$ と表せる。 2^{k-1} (k は自然数) の位の数字が1であるとき、その位に対して〔2〕で定めた $Y_k = X_k - X_{k-1}$ を対応させる。

これらの Y_k の積を Z_m とする。すなわち $Z_3 = Y_2Y_1$ 、 $Z_6 = Y_3Y_2$ である。

このとき、 $Z_9 =$ オ であり、 $Z_1Z_3Z_5 =$ カ である。また、 $Z_7 = 1$ である確率は キ であり、 $Z_{17} = -1$ である確率は ク である。

キ $= \frac{1}{2}$ となるとき、 $p =$ ケ である。このとき $Z_m = 1$ である確率が $\frac{1}{2}$ であるような m を一番小さいものから順に並べて ℓ 番目までを足したときの和は コ となる。ただし ℓ は自然数である。

(オ と カ は $Y_1, Y_2, \dots$ を用いて表すこと)

II 原点を O とする座標空間において、3点 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ を考える。ただし、 $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ である。

四面体 $OABC$ に内接する球の半径を求める。

三角形 ABC を含む平面 α に垂直なベクトルを $\vec{n} = (1, s, t)$ とすると、
 $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ より $s = \boxed{\text{ア}}$ であり、 $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$ より、 $t = \boxed{\text{イ}}$ である。ゆえに、
 平面 α 上の任意の点 R の座標を (x, y, z) とすると、 $\vec{n} \perp \overrightarrow{RA}$ より、 x, y, z は
 $\boxed{\text{ウ}}x + \boxed{\text{エ}}y + \boxed{\text{オ}}z = 1$
 の関係式を満たす。

内接する球の半径を r とすると、球の中心 P の座標は、

$(\boxed{\text{カ}}, \boxed{\text{キ}}, \boxed{\text{ク}})$ となる。四面体 $OABC$ に内接する球と三角形 ABC との接点を $Q(x_1, y_1, z_1)$ とすると、

$\overrightarrow{PQ} = (x_1 - \boxed{\text{カ}}, y_1 - \boxed{\text{キ}}, z_1 - \boxed{\text{ク}})$ は $\vec{n}$ と平行であるので、

$\overrightarrow{PQ} = k\vec{n}$ ($k > 0$) を満たす。よって、 $x_1 = \boxed{\text{カ}} + k$,

$y_1 = \boxed{\text{キ}} + k\boxed{\text{ア}}$, $z_1 = \boxed{\text{ク}} + k\boxed{\text{イ}}$ である。点 Q は平面 α 上の点であるので、

$$k = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2}}$$

が得られる。この式と $|\overrightarrow{PQ}| = \boxed{\text{カ}}$ であることより r が得られる。例えば、

$a = 1$, $b = 1$, $c = 2$ のとき、 $r = \boxed{\text{コ}}$ となる。また、 $a = b = c = 1$ であるとき、

原点から平面 α に下ろした垂線と平面 α との交点を H とするとその座標

は $(\boxed{\text{サ}}, \boxed{\text{シ}}, \boxed{\text{ス}})$ となり、 $|\overrightarrow{OH}| = \boxed{\text{セ}}$, $r = \boxed{\text{ソ}}$ である。

$(\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{ケ}})$ は a, b, c, r のいずれかを用いて表すこと

Ⅲ 各自然数 k に対し、閉区間 $[k-1, k]$ での関数 $f_k(x)$ を、

$f_k(x) = \log k$ ($k-1 \leq x \leq k$) と定める。また、 n は 2 以上の自然数とする。任意の実数 x に対し、 $e^x = \exp(x)$ と表す。

[1]

$$\exp \left(\int_0^1 f_1(x) dx \right) = \boxed{\text{ア}}$$

であり

$$\exp \left(\int_{k-1}^k f_k(x) dx \right) = \boxed{\text{イ}}$$

である。また、2 以上の自然数 n について

$$\exp \left(\sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f_k(x) dx \right) = \boxed{\text{ウ}}$$

である。

[2] 2 以上のすべての自然数 k と $k-1 \leq x \leq k$ を満たすすべての x に対して $\log(x+y) \leq f_k(x)$ を常に満たす実数 y のうち最大のものを a とする。また、すべての自然数 k と $k-1 \leq x \leq k$ を満たすすべての x に対して $f_k(x) \leq \log(x+y)$ を常に満たす実数 y のうち最小のものを b とする。このとき、 $a = \boxed{\text{エ}}$ 、 $b = \boxed{\text{オ}}$ である。

〔3〕 区間 $[0, \infty)$ 上の関数 $g(x)$, $h(x)$ を, 〔2〕で求めた a , b の値を用いて

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1 - \boxed{\text{工}}) \\ \log(x + \boxed{\text{工}}) & (x > 1 - \boxed{\text{工}}) \end{cases}$$

$$h(x) = \log(x + \boxed{\text{才}}) \quad (x \geq 0)$$

と定めると

$$\exp\left(\int_0^n g(x) dx\right) = \boxed{\text{力}}, \quad \exp\left(\int_0^n h(x) dx\right) = \boxed{\text{キ}}$$

である。

〔4〕 自然対数の底 e の定義より, n に無関係な $p = \boxed{\text{ク}}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{力}}} = 1$$

が成り立つ。

IV 関数 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ ($x \geq 0$) について、第1次導関数と第2次導関数はそれ

ぞれ $\frac{d}{dx}f(x) = \boxed{\text{ア}}$, $\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \boxed{\text{イ}}$ である。このとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d}{dx}f(x) = \boxed{\text{ウ}}$$

となる。

関数 $f(x)$ の第2次導関数が正なので、 $\frac{d}{dx}f(x)$ は単調に増加する。したがって

$$y = \frac{d}{dx}f(x) \quad (x > 0)$$

とおいたとき、 y の値域は $\boxed{\text{エ}} < y < \boxed{\text{オ}}$ となる。

さらに $\frac{d}{dx}f(x) = y$ を x について解き、 $x = g(y)$ とおく。このとき、 y を用いて表すと $g(y) = \boxed{\text{カ}}$ であり、その第1次導関数は $\frac{d}{dy}g(y) = \boxed{\text{キ}}$ である。

関数 $h(y)$ を $h(y) = f(g(y)) - yg(y)$ ($\boxed{\text{エ}} < y < \boxed{\text{オ}}$) とおくと、その第1次導関数は $\frac{d}{dy}h(y) = \boxed{\text{ク}}$ であり、 $y = \frac{d}{dx}f(x)$ であるとき、

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}f(x) \right) \left(\frac{d^2}{dy^2}h(y) \right) = \boxed{\text{ケ}}$$

となる。ただし、 $\boxed{\text{ケ}}$ は実数で答えよ。

