

1

[1]

(a) さいころを投げる回数が最も大きくなるのは、最初の6回に1が出るときであるから、

$$\text{その回数は}\boxed{7}_7\text{回で、確率は}\boxed{\frac{1}{6^6}}_7$$

(b) 2回の目の和が7以上になればよく、その余事象は、

$$\begin{aligned} & (1, 5), (1, 4), (1, 3), (1, 2), (1, 1), \\ & (2, 4), (2, 3), (2, 2), (2, 1), \\ & (3, 3), (3, 2), (3, 1), \\ & (4, 2), (4, 1), (5, 1) \end{aligned}$$

の15通りあるから、 $36 - 15 = 21$ (通り)、よって、求める確率は、

$$\frac{21}{36} = \boxed{\frac{7}{12}}_9$$

(c) 3番のマスにとまるのは、

$$(3), (1, 2), (2, 1), (1, 1, 1)$$

と出たときであるから、その確率は、

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{6^2} + \frac{1}{6^3} = \boxed{\frac{49}{216}}_6$$

(d) 2回以内でゲームが終了するのは、次のいずれかの場合である。

(i) 3番のマスにはとまらず、2回で終点に到達する

(ii) 1回または2回で3番のマスにとまる

(i)となるのは(b)の21通りから $(3, 4), (3, 5), (3, 6)$ を除いて、18通りであるから、

その確率は、

$$\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

(ii)となる確率は(c)より、 $\frac{1}{6} + \frac{2}{6^2} = \frac{2}{9}$

以上から、求める確率は、

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{9}} = \boxed{\frac{9}{13}}_9$$

[2] $a_2 = 2a_1 + 2 \cdot 1 = 6$ より、

$$b_1 = 6 - 2 = \boxed{4}_4$$

また、

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+2} - a_{n+1} \\ &= 2a_{n+1} + 2(n+1) - (2a_n + 2n) \\ &= 2(a_{n+1} - a_n) + 2 \\ &= \boxed{2}_3 b_n + \boxed{2}_7 \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} b_{n+1} + 2 &= 2(b_n + 2) \\ \therefore b_n + 2 &= (b_1 + 2) \cdot 2^{n-1} \\ &= 3 \times 2^n \end{aligned}$$

したがって、

$$b_n = \boxed{3}_7 \times \boxed{2}_3^n - \boxed{2}_7 \quad (n=1, 2, \dots)$$

ゆえに、 $\{a_n\}$ の階差数列が $\{b_n\}$ であることから、

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3 \times 2^k - 2) \\ &= 2 + 3 \cdot \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - 2(n-1) \\ &= 3 \times 2^n - 2n - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで、

$$3 \times 2^1 - 2 \times 1 - 2 = 2 = a_1$$

より、 $\textcircled{1}$ は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって、

$$a_n = \boxed{3}_3 \times \boxed{2}_3^n - \boxed{2}_3 n - \boxed{2}_3 \quad (n=1, 2, \dots)$$

[3] $l: (2x+y-5)k + (x+2y+2) = 0$ より、

より、

$$\begin{cases} 2x+y-5=0 \\ x+2y+2=0 \end{cases}$$

を解くと、

$$x=4, y=-3$$

よって、 k の値にかかわらず l が通る定点は、

$$\left(\boxed{4}_9, \boxed{-3}_9 \right)$$

また、

$$C: (x-1)^2 + y^2 = 1$$

より、 C の中心の座標は $\left(\boxed{1}_7, \boxed{0}_7 \right)$ 、半径は $\boxed{1}_7$ 。

ゆえに、 l が C に接するための条件は、

$$\begin{aligned} \frac{|(2k+1) \cdot 1 + (k+2) \cdot 0 - 5k + 2|}{\sqrt{(2k+1)^2 + (k+2)^2}} &= 1 \\ |3k-3| &= \sqrt{5k^2 + 8k + 5} \\ (3k-3)^2 &= 5k^2 + 8k + 5 \\ 2k^2 - 13k + 2 &= 0 \\ k &= \frac{\boxed{13-3\sqrt{17}}_7}{4}, \frac{\boxed{13+3\sqrt{17}}_7}{4} \end{aligned}$$

$P(p_1, p_2), Q(q_1, q_2)$ とおくと、 P, Q における C の接線の方程式は、

それぞれ、

$$\begin{aligned} (p_1-1)(x-1) + p_2 \cdot y &= 1 \\ (q_1-1)(x-1) + q_2 \cdot y &= 1 \end{aligned}$$

これが点 $(4, -3)$ を通るから、

$$\begin{aligned} 3 \cdot (p_1-1) - 3p_2 &= 1 & \therefore 3p_1 - 3p_2 - 4 &= 0 & \dots\dots \textcircled{1} \\ 3 \cdot (q_1-1) - 3q_2 &= 1 & \therefore 3q_1 - 3q_2 - 4 &= 0 & \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$\textcircled{1}$ より、 $P(p_1, p_2)$ は直線 $3x-3y-4=0$ 上の点であり、

$\textcircled{2}$ より、 $Q(q_1, q_2)$ は直線 $3x-3y-4=0$ 上の点である。

よって、異なる2点 P, Q を通る直線はただ1つであるから、

求める直線の方程式は、

$$\boxed{3x-3y-4}_8 = 0$$

Ⅱ

[1] 通話時間の平均値は、

$$\frac{5 \times 3 + 6 \times 2 + 8 + 7 + 3 + 4 + 2}{10} = \boxed{5.1}_{\text{ア}} \text{ (分間)}$$

通話時間が少ない順に並べると、

$$2, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8$$

となるから、中央値は、

$$\frac{5 + 5}{2} = \boxed{5}_{\text{イ}} \text{ (分間)}$$

四分位範囲は、

$$6 - 4 = \boxed{2}_{\text{ウ}} \text{ (分間)}$$

また、分散は、

$$\begin{aligned} & \frac{5^2 \times 3 + 6^2 \times 2 + 8^2 + 7^2 + 3^2 + 4^2 + 2^2}{10} - 5.1^2 \\ &= 28.9 - 26.01 \\ &= 2.89 \end{aligned}$$

であるから、標準偏差は、

$$\sqrt{2.89} = \boxed{1.7}_{\text{エ}} \text{ (分間)}$$

[2] 「通し番号 10 の次の顧客の電話が着信した時刻は 10 時 0 分であった」ことも

含めると a_k ($k = 1, 2, \dots, 10$) は順に、

$$9, 2, 5, 6, 5, 4, 6, 9, 8, 6$$

であるから、 a_k の平均値は、

$$\frac{9 \times 2 + 2 + 5 \times 2 + 6 \times 3 + 4 + 8}{10} = \boxed{6}_{\text{オ}} \text{ (分間)}$$

よって、分散は、

$$\frac{(9 - 6)^2 \times 2 + (2 - 6)^2 + (5 - 6)^2 \times 2 + (6 - 6)^2 \times 3 + (4 - 6)^2 + (8 - 6)^2}{10} = 4.4$$

したがって、標準偏差は、

$$\boxed{\sqrt{4.4}}_{\text{カ}} \text{ (分間)}$$

[3] <表 A>

通し番号	着信	通話開始	通話時間	通話終了	待機時間
1	9 時 0 分	9 時 0 分	5 分間	9 時 5 分	0 分間
2	9	9	6	15	0
3	11	15	8	23	4
4	16	23	7	30	7
5	22	30	6	36	8
6	27	36	3	39	9
7	31	39	5	44	8
8	37	44	4	48	7
9	46	48	5	53	2
10	54	54	2	56	0

表 A より、待機時間が 0 分間でない顧客の数は $\boxed{7}_{\text{キ}}$ 人であり、

10 人の待機時間の平均値は、

$$\frac{4 + 7 + 8 + 9 + 7 + 2 + 0 \times 3}{10} = \boxed{4.5}_{\text{ク}} \text{ (分間)}$$

[4] (a) <表 B>

通し番号	着信	通話開始	通話時間	通話終了	待機時間
1	9 時 0 分	9 時 0 分	4 分間	9 時 4 分	0 分間
2	9	9	5	14	0
3	11	14	7	21	3
4	16	21	6	27	5
5	22	27	5	32	5
6	27	32	2	34	5
7	31	34	4	38	3
8	37	38	3	41	1
9	46	46	4	50	0
10	54	54	1	55	0

表 B より、待機時間の平均値は、

$$\frac{3 \times 2 + 5 \times 3 + 1 + 0 \times 4}{10} = \boxed{2.2}_{\text{ケ}} \text{ (分間)}$$

となり、

$$4.5 - 2.2 = \boxed{2.3}_{\text{コ}} \text{ (分間)}$$

減る、

(b) <表 C>

通し番号	着信	通話開始	通話時間	通話終了	待機時間
1	9 時 0 分	9 時 0 分	5 分間	9 時 5 分	0 分間
2	6	6	6	12	0
3	12	12	8	20	0
4	18	20	7	27	2
5	24	27	6	33	3
6	30	33	3	36	3
7	36	36	5	41	0
8	42	42	4	46	0
9	48	48	5	53	0
10	54	54	2	56	0

表 C より、待機時間の平均値は、

$$\frac{2 + 3 \times 2 + 0 \times 7}{10} = \boxed{0.8}_{\text{カ}} \text{ (分間)}$$

となり、

$$4.5 - 0.8 = \boxed{3.7}_{\text{シ}} \text{ (分間)}$$

減る、

Ⅲ

[1] $f(x)=x^3-4ax^2+3a^2x$ より,

$$\begin{aligned} f(x)-h(x) &= x^3-4ax^2+a(3a+1)x \\ &= x\{x^2-4ax+a(3a+1)\} \end{aligned}$$

よって、 $y=f(x)$ と $y=h(x)$ が原点以外の 1 点で接するための条件は、 x の方程式

$$x^2-4ax+a(3a+1)=0 \quad \cdots\cdots\textcircled{1}$$

が、 $x=0$ 以外の重解をもつことである。

$$\begin{aligned} \frac{(\textcircled{1}の判別式)}{4} &= (-2a)^2-1\cdot a(3a+1) \\ &= a(a-1)=0 \end{aligned}$$

であるから、 $a>0$ より、 $a=1$

このとき、 $\textcircled{1}$ の重解は $x=2$ ($\neq 0$)

したがって、求める a の値は、

$$a=1 \quad \cdots\cdots \text{ (答)}$$

[2] $f'(x)=3x^2-8ax+3a^2$ より、 α, β は、

x の 2 次方程式 $f'(x)=0$ の 2 解である。

このとき、 $\alpha<\beta$ とすると、次の増減表より、

$f(x)$ はたしかに $x=\alpha$ で極大値、 $x=\beta$ で極小値をとる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって、 $f'(x)=0$ で解と係数の関係より、

$$\alpha+\beta=\frac{8}{3}a$$

ゆえに、点 M の x 座標は、

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{4}{3}a$$

また、

$$f(x)=\left(\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}a\right)f'(x)-\frac{14}{9}a^2x+\frac{4}{3}a^3$$

より、点 M の y 座標は、

$$\begin{aligned} \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} &= \frac{1}{2}\left\{-\frac{14}{9}a^2(\alpha+\beta)+\frac{4}{3}a^3\cdot 2\right\} \\ &= -\frac{7}{9}a^2\cdot\frac{8}{3}a+\frac{4}{3}a^3 \\ &= -\frac{20}{27}a^3 \end{aligned}$$

以上から、

$$M\left(\frac{4}{3}a, -\frac{20}{27}a^3\right) \quad \cdots\cdots \text{ (答)}$$

[3] $y=h(x)$ が点 M を通るとき、

$$\begin{aligned} -\frac{20}{27}a^3 &= -a\cdot\frac{4}{3}a \\ a^2(5a-9) &= 0 \end{aligned}$$

$a>0$ より、

$$a=\frac{9}{5} \quad \cdots\cdots \text{ (答)}$$

このとき、

$$\begin{aligned} f(x)-h(x) &= \left(x^3-\frac{36}{5}x^2+\frac{243}{25}x\right)-\left(-\frac{9}{5}x\right) \\ &= x^3-\frac{36}{5}x^2+\frac{288}{25}x \\ &= x\left(x-\frac{12}{5}\right)\left(x-\frac{24}{5}\right) \end{aligned}$$

より、

$$f(x)-h(x)\begin{cases} \geq 0 & \left(0\leq x\leq\frac{12}{5}\right) \\ \leq 0 & \left(\frac{12}{5}\leq x\leq\frac{24}{5}\right) \end{cases}$$

よって、 $y=f(x)$ と $y=h(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積は、

それぞれ、

$$\int_0^{\frac{12}{5}}(f(x)-h(x))dx, \int_{\frac{12}{5}}^{\frac{24}{5}}(h(x)-f(x))dx$$

と表せる。

ここで、

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{12}{5}}(f(x)-h(x))dx-\int_{\frac{12}{5}}^{\frac{24}{5}}(h(x)-f(x))dx \\ &= \int_0^{\frac{24}{5}}(f(x)-h(x))dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{12}{5}x^3+\frac{144}{25}x^2\right]_0^{\frac{24}{5}} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{24}{5}\right)^4-\frac{12}{5}\left(\frac{24}{5}\right)^3+\frac{144}{25}\left(\frac{24}{5}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{24}{5}-\frac{12}{5}+\frac{6}{5}\right)\left(\frac{24}{5}\right)^3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

より、

$$\int_0^{\frac{12}{5}}(f(x)-h(x))dx=\int_{\frac{12}{5}}^{\frac{24}{5}}(h(x)-f(x))dx$$

(証明終り)

[4]

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= x(x-a)(x-3a)-x(x-3a) \\ &= x(x-3a)\{x-(a+1)\} \end{aligned}$$

よって、 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の x 座標は、

$$x=0, 3a, a+1$$

であり、 $a\geq 1$ において、

$$3a-(a+1)=2a-1>0$$

より、

$$3a>a+1$$

よって、

$$f(x)-g(x)\begin{cases} \geq 0 & (0\leq x\leq a+1) \\ \leq 0 & (a+1\leq x\leq 3a) \end{cases}$$

よって、 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積は、

それぞれ、

$$\int_0^{a+1}(f(x)-g(x))dx, \int_{a+1}^{3a}(g(x)-f(x))dx$$

と表せる。

ここで、

$$\begin{aligned} &\int_0^{a+1}(f(x)-g(x))dx-\int_{a+1}^{3a}(g(x)-f(x))dx \\ &= \int_0^{3a}(f(x)-g(x))dx \\ &= \int_0^{3a}\{x^3-(4a+1)x^2+3a(a+1)x\}dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(4a+1)x^3+\frac{3}{2}a(a+1)x^2\right]_0^{3a} \\ &= \frac{81}{4}a^4-9(4a+1)a^3+\frac{27}{2}(a+1)a^3 \\ &= \frac{a^3}{4}(18-9a) \end{aligned}$$

よって、2 つの部分の面積が等しくなるための条件は、

$$\frac{a^3}{4}(18-9a)=0$$

$a>0$ より、

$$a=2 \quad \cdots\cdots \text{ (答)}$$