

【解答】

ア	$10a_2+a_1$	イ	$10a_1+a_2$	ウ	9	エ	a_3	オ	90
---	-------------	---	-------------	---	---	---	-------	---	----

カ	99	キ	891	ク	$9 \cdot 10^{\frac{n-1}{2}}$	ケ	$9 \cdot 10^{\frac{n-2}{2}}$
---	----	---	-----	---	------------------------------	---	------------------------------

コ	198	サ	990
---	-----	---	-----

【解説】

[1]

m が 2 桁の自然数であり、1 の位が a_1 、10 の位が a_2 であるため、

$$m=10a_2+a_1$$

と表される。また、

$$m'=10a_1+a_2$$

となるため、

$$m-m'=(10a_2+a_1)-(10a_1+a_2)$$

$$=9(a_2-a_1)$$

が成り立つ。 a_1, a_2 はともに整数であるため a_2-a_1 も整数であり、 $m-m'$ は常に 9 の倍数に

なる。 $\frac{m-m'}{9}$ が必ず持つ素因数がないか確認すると、 $m=54$ のとき、 $m'=45$ であるため、

$$\frac{m-m'}{9}=\frac{54-45}{9}$$

$$=1$$

となり、 $\frac{m-m'}{9}$ が必ず持つ素因数は存在しない。

[2]

m が 3 桁の自然数であり、1 の位が a_1 、10 の位が a_2 、 10^2 の位が a_3 であるため、 $a_3 \geq 1$ であり、

$$m=10^2a_3+10a_2+a_1$$

と表される。また、

$$m'=10^2a_1+10a_2+a_3$$

となるため、

$$m-m'=(10^2a_3+10a_2+a_1)-(10^2a_1+10a_2+a_3)$$

$$=(10^2-1)(a_3-a_1)$$

$$=99(a_3-a_1)$$

である。よって、

$$m=m'$$

$$\Leftrightarrow m-m'=0$$

$$\Leftrightarrow 99(a_3-a_1)=0$$

$$\Leftrightarrow a_1=a_3$$

となるため、 $m=m'$ であるための必要十分条件は、 $a_1=a_3$ が成り立つことである。このとき、

m は 3 桁の自然数であり 1 の位の値 a_1 と 10^2 の位の値 a_3 は 1, ..., 9 の 9 個の値を取りうる。 a_2

は 0, ..., 9 の 10 個の値をとりうるため、 $m=m'$ となる 3 桁の自然数 m は、

$$9 \cdot 10 = 90 (\text{個})$$

存在する。また、 $m-m'=99(a_3-a_1)$ であり、 a_1, a_3 はともに整数であるため a_3-a_1 も整数で

あり、 $m-m'$ は常に 99 の倍数になる。 $\frac{m-m'}{99}$ が必ず持つ素因数がないか確認すると、

$m=100$ のとき、 $m'=1$ であるため、

$$\frac{m-m'}{99}=\frac{100-1}{99}$$

$$=1$$

となり、 $\frac{m-m'}{99}$ が必ず持つ素因数は存在しない。さらに、 a_1, a_3 はともに整数であり、

$0 \leq a_1 \leq 9, 1 \leq a_3 \leq 9$ であるため、 $m-m'$ がとりうる最大の値は、 $a_1=0, a_3=9$ のとき

$$m-m'=99 \cdot (9-0)$$

$$=891$$

である。

[3]

m は n 桁 ($n \geq 3$) の自然数であり、 10^{k-1} の位が a_k ($k=1, \dots, n$) であるため、 $a_n \geq 1$ であり、

$$m=\sum_{k=1}^n 10^{k-1} a_k$$

と表される。また、

$$m'=\sum_{k=1}^n 10^{k-1} a_{n+1-k}$$

となる。よって、 n が奇数であるとき、 $m=m'$ となる必要十分条件は、任意の自然数

$p \left(1 \leq p \leq \frac{n-1}{2} \right)$ に対し、 $a_p=a_{n+1-p}$ が成り立つことである。このとき、 a_1 と a_n は 9 個の値を

とり、 $a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$ は 10 個の値を取り得るため、 $m=m'$ となるものは $9 \cdot 10^{\frac{n-1}{2}}$ 個存在する。

n が偶数であるとき、 $m=m'$ となる必要十分条件は、任意の自然数 $p \left(1 \leq p \leq \frac{n-1}{2} \right)$ に対し、

$a_p=a_{n+1-p}$ が成り立つことであり、同様に考えるとそのような m は $9 \cdot 10^{\frac{n-2}{2}}$ 個存在する。ま

た、 $n=3$ のとき、[2] より、 $m-m'=99(a_3-a_1)$ である。よって、 a_1, a_3 がともに偶数または

ともに奇数であれば、 a_3-a_1 は 2 の倍数であるので、 $m-m'$ は常に 99 の倍数かつ 2 の倍数、

すなわち 198 の倍数である。 n が 5 以上の奇数であるとき、

$$\begin{aligned} m-m' &= \sum_{k=1}^n 10^{k-1} a_k - \sum_{k=1}^n 10^{k-1} a_{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^n 10^{k-1} (a_k - a_{n+1-k}) \\ &= \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} 10^{k-1} (a_k - a_{n+1-k}) + 10^{\frac{n+1}{2}-1} \left(a_{\frac{n+1}{2}} - a_{\frac{n+1}{2}} \right) + \sum_{k=\frac{n+3}{2}}^n 10^{k-1} (a_k - a_{n+1-k}) \quad (\because n \geq 5) \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} 10^{k-1} (a_k - a_{n+1-k}) = -\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} 10^{k-1} (a_{n+1-k} - a_k) \\ 10^{\frac{n+1}{2}-1} \left(a_{\frac{n+1}{2}} - a_{\frac{n+1}{2}} \right) = 0 \\ \sum_{k=\frac{n+3}{2}}^n 10^{k-1} (a_k - a_{n+1-k}) = \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} 10^{n-k} (a_{n+1-k} - a_k) \end{cases}$$

であるため、

$$\begin{aligned} m-m' &= -\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} 10^{k-1} (a_{n+1-k} - a_k) + 0 + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} 10^{n-k} (a_{n+1-k} - a_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (10^{n-k} - 10^{k-1}) (a_{n+1-k} - a_k) \\ &= (10^{n-1} - 10^{1-1}) (a_{n+1-1} - a_1) + \sum_{k=2}^{\frac{n-1}{2}} (10^{n-k} - 10^{k-1}) (a_{n+1-k} - a_k) \quad (\because n \geq 5) \\ &= (10^{n-1} - 1) (a_n - a_1) + \sum_{k=2}^{\frac{n-1}{2}} (10^{n-k} - 10^{k-1}) (a_{n+1-k} - a_k) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、任意の自然数 l に対し、

$$\begin{aligned} 10^{2l} - 1 &= (10^2 - 1) (10^{2l-2} + 10^{2l-4} + \dots + 1) \\ &= 99 \sum_{j=0}^{l-1} 10^{2j} \end{aligned}$$

となる。 $\sum_{j=0}^{l-1} 10^{2j}$ は整数であるため、 $10^{2l} - 1$ は 99 の倍数であり、 n が 3 以上の奇数であれば

$n-1$ は 2 以上の偶数であるため、 $10^{n-1} - 1$ は 99 の倍数である。一方で、 a_1, a_n がともに偶数

またはともに奇数であれば $a_n - a_1$ は偶数である。以上より、 n が奇数かつ a_1, a_n がともに偶

数またはともに奇数であれば $(10^{n-1} - 1) (a_n - a_1)$ は 198 の倍数である。また、任意の自然数

$p \left(2 \leq p \leq \frac{n-1}{2} \right)$ に対し、 $n-2p+1$ は 2 以上の偶数であるため

$$\begin{aligned} 10^{n-p} - 10^{p-1} &= 10^{p-1} (10^{n-2p+1} - 1) \\ &= 10^{p-2} \cdot 990 \sum_{j=0}^{\frac{n-2p+1}{2}-1} 10^{2j} \end{aligned}$$

が成り立つ。 10^{p-2} 、 $\sum_{j=0}^{\frac{n-2p+1}{2}-1} 10^{2j}$ はともに整数であるため、 $10^{n-p} - 10^{p-1}$ は 990 の倍数である。

よって、 $a_{n+1-k} - a_k$ は整数であるため、 n が 5 以上の奇数のとき $m-m'$ は常に 198 の倍数と

990 の倍数の和であり、常に 198 の倍数となる。以上より、 n が 3 以上の奇数かつ a_1, a_n がと

ともに偶数またはともに奇数であれば、 $m-m'$ は常に 198 の倍数になる。 $\frac{m-m'}{198}$ が必ず持つ素

因数がないか確認すると、 $m=200$ のとき、 $m'=2$ であるため、

$$\frac{m-m'}{198}=\frac{200-2}{198}$$

$$=1$$

となり、 $\frac{m-m'}{198}$ が必ず持つ素因数は存在しない。さらに、 $a_1=a_n$ であれば、 $n=3$ のとき

$m-m'=0$ であり、 $m \geq 5$ のとき $(10^{n-1} - 1) (a_n - a_1) = 0$ であるため、

$$m-m'=\sum_{k=2}^{\frac{n-1}{2}} (10^{n-k} - 10^{k-1}) (a_{n+1-k} - a_k)$$

が成り立ち、 $m-m'$ は常に 990 の倍数になる。よって、 n が 3 以上の奇数のとき $m-m'$ は常

に 990 の倍数になる。 $\frac{m-m'}{990}$ が必ず持つ素因数がないか確認すると、 $m=11001$ のとき、

$m'=10011$ であるため、

$$\frac{m-m'}{990}=\frac{11001-10011}{990}$$

$$=1$$

となり、 $\frac{m-m'}{990}$ が必ず持つ素因数は存在しない。

【解答】

ア	$1+\log x$	イ	$\frac{1}{e}$	ウ	$-\frac{1}{e}$	エ	$\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2$
---	------------	---	---------------	---	----------------	---	---------------------------------------

オ	e^k	カ	$\frac{1}{4}(e^{2k}-1)$	キ	$\frac{1}{4}(1-e^{-2k})$	ク	$\frac{1}{2}\log 5$
---	-------	---	-------------------------	---	--------------------------	---	---------------------

ケ	1	コ	$2\log 2-\frac{3}{4}$	サ	$4e^{-\frac{3}{4}}$
---	---	---	-----------------------	---	---------------------

【解説】

[1]

$f(x)=x\log x$ ($x>0$) より, $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は,

$$\begin{aligned}f'(x) &= x\cdot\frac{1}{x}+1\cdot\log x \\ &= 1+\log x\end{aligned}$$

である。また,

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1+\log x &= 0 \\ \Leftrightarrow \log x &= -1 \\ \therefore x &= \frac{1}{e}\end{aligned}$$

となるため, $f'(x)=0$ を満たす x の値は $\frac{1}{e}$ であり,

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{e}\right) &= \frac{1}{e}\cdot\log\frac{1}{e} \\ &= -\frac{1}{e}\end{aligned}$$

となる。さらに, $f(x)$ の不定積分は,

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int x\log xdx \\ &= \int\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{2}x^2\right)\cdot\log xdx \\ &= \frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{d}{dx}\log xdx \\ &= \frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{2}\int xdx \\ &= \frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2+C\end{aligned}$$

である。ただし, C は積分定数である。

[2]

$$\begin{aligned}f(x) &= kx \\ \Leftrightarrow x\log x &= kx \\ \Leftrightarrow \log x &= k \left(\because x>0\right) \\ \therefore x &= e^k\end{aligned}$$

となるため, 直線 $y=kx$ と曲線 $y=f(x)$ の共有点の x 座標は e^k である。よって,

$$\begin{aligned}f(e^k) &= e^k\log e^k \\ &= ke^k\end{aligned}$$

となるため, 直線 $y=kx$ と曲線 $y=f(x)$ の共有点の座標は (e^k, ke^k) である。また, 直線

$y=-kx$ と曲線 $y=f(x)$ の共有点の座標は $(e^{-k}, -ke^{-k})$ であり,

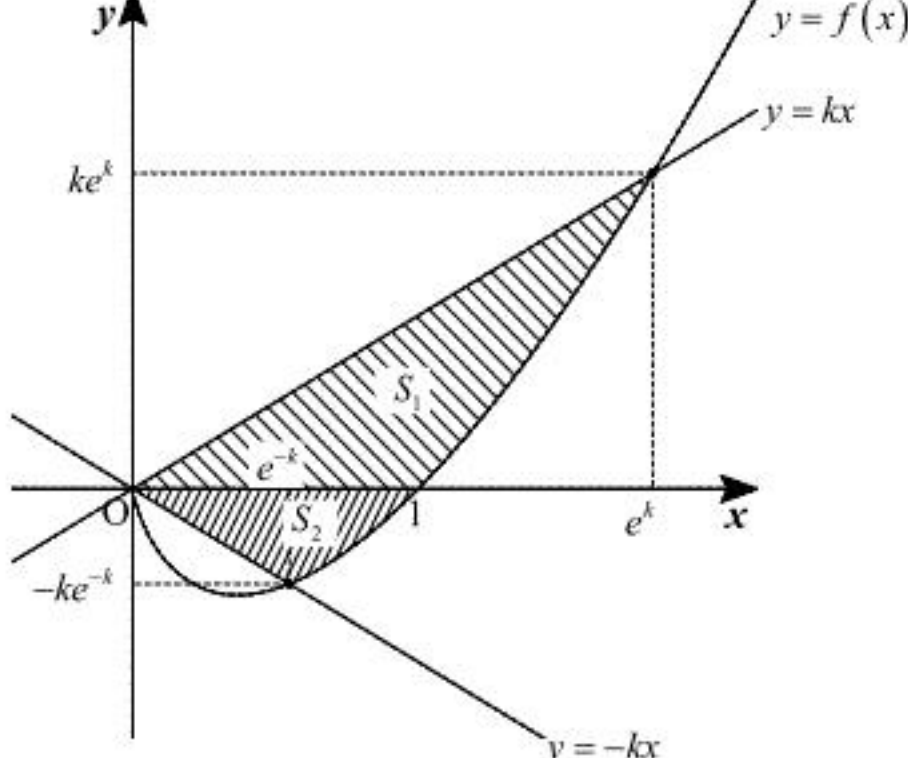
$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x\log x &= 0 \\ \Leftrightarrow \log x &= 0 \left(\because x>0\right) \\ \therefore x &= 1\end{aligned}$$

となるため, 直線 $y=0$ と曲線 $y=f(x)$ の共有点の座標は $(1, 0)$ である。さらに,

$$\lim_{x\rightarrow+0}f(x)=0$$

が成り立つ。以上より, 2 直線 $y=kx, y=0$ および曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形と 2 直線

$y=-kx, y=0$ および曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形はそれぞれ下図の斜線部である。



上図より, 2 直線 $y=kx, y=0$ および曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積は, [1] より,

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{1}{2}\cdot e^k\cdot ke^k-\int_1^{e^k}f(x)dx \\ &= \frac{1}{2}ke^{2k}-\left[\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2\right]_1^{e^k} \\ &= \frac{1}{2}ke^{2k}-\left\{\left(\frac{1}{2}ke^{2k}-\frac{1}{4}e^{2k}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{4}(e^{2k}-1)\end{aligned}$$

である。また, 2 直線 $y=-kx, y=0$ および曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積は,

$$\begin{aligned}S_2 &= \frac{1}{2}\cdot e^{-k}\cdot ke^{-k}+\int_{e^{-k}}^1\{-f(x)\}dx \\ &= \frac{1}{2}\cdot e^{-k}\cdot ke^{-k}-\int_{e^{-k}}^1f(x)dx \\ &= \frac{1}{2}ke^{-2k}-\left[\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2\right]_{e^{-k}}^1 \\ &= \frac{1}{2}ke^{-2k}-\left\{\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2}ke^{-2k}-\frac{1}{4}e^{-2k}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{4}(1-e^{-2k})\end{aligned}$$

である。さらに,

$$\begin{aligned}\frac{S_1}{S_2} &= \frac{\frac{1}{4}(e^{2k}-1)}{\frac{1}{4}(1-e^{-2k})} \\ &= e^{2k}\end{aligned}$$

であるため, $S_1:S_2=5:1$ であるとき,

$$\begin{aligned}S_1:S_2 &= 5:1 \\ \Leftrightarrow \frac{S_1}{S_2} &= 5 \\ \Leftrightarrow e^{2k} &= 5 \\ \therefore k &= \frac{1}{2}\log 5\end{aligned}$$

となる。よって, k の値は $\frac{1}{2}\log 5$ であり, そのときの S_1 の値は,

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{1}{4}\cdot\left(e^{2\frac{1}{2}\log 5}-1\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

である。

[3]

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n}\right)\log\left(1+\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^nf\left(1+\frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

であるため, [1] と区分別積分法より, 極限 $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n$ の値は,

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}a_n &= \lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^nf\left(1+\frac{k}{n}\right) \\ &= \int_1^2f(x)dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2\right]_1^2 \\ &= (2\log 2-1)-\left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= 2\log 2-\frac{3}{4}\end{aligned}$$

である。また,

$$\begin{aligned}\log\left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n+1}{n^2}}\times\left(\frac{n+2}{n}\right)^{\frac{n+2}{n^2}}\times\cdots\times\left(\frac{n+n}{n}\right)^{\frac{n+n}{n^2}}\right\} &= \sum_{k=1}^n\log\left(\frac{n+k}{n}\right)^{\frac{n+k}{n^2}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n}\right)\log\left(1+\frac{k}{n}\right) \\ &= a_n\end{aligned}$$

となるため, $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n+1}{n^2}}\times\left(\frac{n+2}{n}\right)^{\frac{n+2}{n^2}}\times\cdots\times\left(\frac{n+n}{n}\right)^{\frac{n+n}{n^2}}=e^{a_n}$ が成り立つ。指数関数 e^x は連続関数

であるため, 求める極限の値は,

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n+1}{n^2}}\times\left(\frac{n+2}{n}\right)^{\frac{n+2}{n^2}}\times\cdots\times\left(\frac{n+n}{n}\right)^{\frac{n+n}{n^2}} &= \lim_{n\rightarrow\infty}e^{a_n} \\ &= e^{2\log 2-\frac{3}{4}} \\ &= 4e^{-\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

である。

【解答】

ア	$-2 < k < 2$	イ	$\frac{k}{2}$	ウ	$\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}$	エ	1
---	--------------	---	---------------	---	--------------------------	---	---

オ	4	カ	$\frac{\sqrt{2+k}}{2}$	キ	$\frac{\sqrt{2-k}}{2}$	ク	$2n$	ケ	n	コ	$\sqrt{2}$
---	---	---	------------------------	---	------------------------	---	------	---	-----	---	------------

【解説】

2次方程式 $f(z)=0$ の判別式を D とおくと、

$$\begin{aligned} D &= (-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= k^2 - 4 \\ &= (k+2)(k-2) \end{aligned}$$

となる。 k は実数であるため、方程式 $f(z)=0$ が実数でない解をもつための必要十分条件は、

$$\begin{aligned} D &< 0 \\ \Leftrightarrow (k+2)(k-2) &< 0 \end{aligned}$$

$$\therefore -2 < k < 2$$

である。このとき、方程式 $f(z)=0$ の複素数の解は、

$$\begin{aligned} z &= \frac{k \pm \sqrt{-Di}}{2} \\ &= \frac{k}{2} \pm \frac{\sqrt{4-k^2}}{2} i \end{aligned}$$

である。さらに、

$$\left| \frac{k}{2} \pm \frac{\sqrt{4-k^2}}{2} i \right| = \sqrt{\left(\frac{k}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4-k^2}}{2} \right)^2}$$

$$= 1$$

である。ここで、 α を $\cos \alpha = \frac{k}{2}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{4-k^2}}{2}$, $0 < \alpha < \pi$ を満たす(ただ1つの)実数、 β を

$\cos \beta = \frac{3}{5}$, $\sin \beta = \frac{4}{5}$, $0 < \beta < \pi$ を満たす(ただ1つの)実数として $\left| \frac{k}{2} + \frac{\sqrt{4-k^2}}{2} i - 3 - 4i \right|$ を2乗す

ると

$$\begin{aligned} \left| \frac{k}{2} + \frac{\sqrt{4-k^2}}{2} i - 3 - 4i \right|^2 &= \left| \cos \alpha + i \sin \alpha - 5(\cos \beta + i \sin \beta) \right|^2 \\ &= (\cos \alpha - 5 \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - 5 \sin \beta)^2 \\ &= 26 - 10(\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha) \\ &= 26 - 10 \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

である。よって、 $\left| \frac{k}{2} + \frac{\sqrt{4-k^2}}{2} i - 3 - 4i \right|^2$ は $\alpha = \beta$ のとき最小値をとり、その値は、

$$\begin{aligned} \left| \frac{k}{2} + \frac{\sqrt{4-k^2}}{2} i - 3 - 4i \right|^2 &= 26 - 10 \cdot 1 \\ &= 16 \end{aligned}$$

である。 $\left| \frac{k}{2} + \frac{\sqrt{4-k^2}}{2} i - 3 - 4i \right| \geq 0$ であるから、 $\left| \frac{k}{2} + \frac{\sqrt{4-k^2}}{2} i - 3 - 4i \right|^2$ が最小値をとるとき

$\left| \frac{k}{2} + \frac{\sqrt{4-k^2}}{2} i - 3 - 4i \right|$ も最小値をとるため、 $\left| \frac{k}{2} + \frac{\sqrt{4-k^2}}{2} i - 3 - 4i \right|$ の最小値は、

$$\left| \frac{k}{2} + \frac{\sqrt{4-k^2}}{2} i - 3 - 4i \right| = 4$$

となる。これを与える k は、

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta \\ \Leftrightarrow \cos \alpha &= \cos \beta \\ \Leftrightarrow \frac{k}{2} &= \frac{3}{5} \\ \therefore k &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

である。また、方程式 $f(z)=0$ の解は、

$$z = \cos \alpha + i \sin \alpha, \cos(2\pi - \alpha) + i \sin(2\pi - \alpha)$$

と表される。よって、 $f_2(z) = f(z^2)$ とおくと、

$$\begin{aligned} f_2(z) &= 0 \\ \Leftrightarrow z^2 &= \cos \alpha + i \sin \alpha, \cos(2\pi - \alpha) + i \sin(2\pi - \alpha) \end{aligned}$$

となる。 $|\cos \alpha + i \sin \alpha| = |\cos(2\pi - \alpha) + i \sin(2\pi - \alpha)| = 1$ より、 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) と

おく。このとき、ド・モアブルの定理より、

$$\begin{aligned} z^2 &= (\cos \theta + i \sin \theta)^2 \\ &= \cos 2\theta + i \sin 2\theta \end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned} z^2 &= \cos \alpha + i \sin \alpha \\ \Leftrightarrow \cos 2\theta + i \sin 2\theta &= \cos \alpha + i \sin \alpha \\ \Leftrightarrow 2\theta &= \alpha, \alpha + 2\pi \quad (\because 0 \leq \theta < 2\pi) \\ \therefore \theta &= \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} + \pi \\ z^2 &= \cos(2\pi - \alpha) + i \sin(2\pi - \alpha) \\ \Leftrightarrow \cos 2\theta + i \sin 2\theta &= \cos(2\pi - \alpha) + i \sin(2\pi - \alpha) \\ \Leftrightarrow 2\theta &= 2\pi - \alpha, 4\pi - \alpha \quad (\because 0 \leq \theta < 2\pi) \\ \therefore \theta &= \pi - \frac{\alpha}{2}, 2\pi - \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} f_2(z) &= 0 \\ \Leftrightarrow z &= \cos \theta + i \sin \theta \left(\theta = \frac{\alpha}{2}, \pi - \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} + \pi, 2\pi - \frac{\alpha}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 < \alpha < \pi$ より、 $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ であるため、

$$\begin{aligned} \cos \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + \frac{k}{2}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2+k}}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 - \frac{k}{2}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2-k}}{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、方程式 $f_2(z)=0$ の複素数の解の中で最も偏角が小さいものは、

$$\begin{aligned} z &= \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2+k}}{2} + \frac{\sqrt{2-k}}{2} i \end{aligned}$$

である。また、3以上の自然数 n について、 $f_n(z) = f(z^n)$ とおくと、

$$\begin{aligned} f_n(z) &= 0 \\ \Leftrightarrow z^n &= \cos \alpha + i \sin \alpha, \cos(2\pi - \alpha) + i \sin(2\pi - \alpha) \end{aligned}$$

となる。 $|\cos \alpha + i \sin \alpha| = |\cos(2\pi - \alpha) + i \sin(2\pi - \alpha)| = 1$ より、 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) と

おく。このとき、ド・モアブルの定理より、

$$\begin{aligned} z^n &= (\cos \theta + i \sin \theta)^n \\ &= \cos n\theta + i \sin n\theta \end{aligned}$$

であるため、 m を自然数とすると、

$$\begin{aligned} z^n &= \cos \alpha + i \sin \alpha \\ \Leftrightarrow \cos n\theta + i \sin n\theta &= \cos \alpha + i \sin \alpha \\ \Leftrightarrow n\theta &= \alpha + 2(m-1)\pi \quad (1 \leq m \leq n) \quad (\because 0 \leq \theta < 2\pi) \\ \therefore \theta &= \frac{\alpha + 2(m-1)\pi}{n} \quad (1 \leq m \leq n) \\ z^n &= \cos(2\pi - \alpha) + i \sin(2\pi - \alpha) \\ \Leftrightarrow \cos n\theta + i \sin n\theta &= \cos(2\pi - \alpha) + i \sin(2\pi - \alpha) \\ \Leftrightarrow n\theta &= 2m\pi - \alpha \quad (1 \leq m \leq n) \quad (\because 0 \leq \theta < 2\pi) \\ \therefore \theta &= \frac{2m\pi - \alpha}{n} \quad (1 \leq m \leq n) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} f_n(z) &= 0 \\ \Leftrightarrow z &= \cos \frac{\alpha + 2(m-1)\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2(m-1)\pi}{n} \quad (1 \leq m \leq n), \\ \cos \frac{2m\pi - \alpha}{n} + i \sin \frac{2m\pi - \alpha}{n} \quad (1 \leq m \leq n) \end{aligned}$$

となり、 $0 < \alpha < \pi$ であるため、方程式 $f_n(z)=0$ の複素数の解は $2n$ 個存在する。また、この

中で虚部が正であるには $0 < \arg(z) < \pi$ であればよい。 $0 < \alpha < \pi$ より、任意の自然数

m ($1 \leq m \leq n$) に対し、

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{\alpha + 2(m-1)\pi}{n} < \pi \\ \Leftrightarrow -\frac{\alpha}{\pi} &< 2(m-1) < n - \frac{\alpha}{\pi} \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{\alpha}{2\pi} &< m < \frac{n}{2} + 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \\ 0 &< \frac{2m\pi - \alpha}{n} < \pi \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\pi} &< 2m < n + \frac{\alpha}{\pi} \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2\pi} &< m < \frac{n}{2} + \frac{\alpha}{2\pi} \end{aligned}$$

である。ここで、 $0 < \alpha < \pi$ より $0 < \frac{\alpha}{2\pi} < \frac{1}{2}$ であるため、 n が奇数のとき虚部が正であるのは

$$\frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{2} = n \text{ (個)}$$

であり、 n が偶数のとき、虚部が正であるのは

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n \text{ (個)}$$

である。よって、方程式 $f_n(z)=0$ の $2n$ 個の複素数の解のうち、虚部が正であるものは n 個

である。ここで、集合 $\left\{ \frac{\alpha + 2(m-1)\pi}{n} \mid 1 \leq m \leq n \right\} \cup \left\{ \frac{2m\pi - \alpha}{n} \mid 1 \leq m \leq n \right\}$ の要素のうち、 $\frac{\pi}{4}$ と

の差の絶対値が最も小さいものを φ_n とおく。このとき、 φ_n の定義より、 $0 \leq \left| \varphi_n - \frac{\pi}{4} \right| \leq \frac{2\pi}{n}$ で

あり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{n} = 0$ であるため、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \varphi_n - \frac{\pi}{4} \right| = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \frac{\pi}{4}$$

である。また、

$$\cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

であるため、 $u_n = \sqrt{2} \sin \left(\varphi_n + \frac{\pi}{4} \right)$ が成り立つ。したがって、求める極限の値は、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \sin \left(\varphi_n + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \sqrt{2}$$

である。

IV

【解答】

ア	$\frac{1}{4}$	イ	$\frac{7}{36}$	ウ	$\frac{11}{72}$	エ	$\frac{27}{64}$	オ	$\frac{5}{64}$	カ	$\frac{1}{5}$
---	---------------	---	----------------	---	-----------------	---	-----------------	---	----------------	---	---------------

キ	$-\frac{1}{3}$	ク	$\frac{1}{3}$	ケ	$\frac{26}{27}$	コ	$2\left(\frac{1}{6}+\frac{a}{2}\right)^2$	サ	$\frac{\sqrt{2}-1}{3}$	シ	$\frac{1}{3}$
---	----------------	---	---------------	---	-----------------	---	---	---	------------------------	---	---------------

【解説】

[1] (a)

$$a_1=a_2=\frac{1}{4}, a_3=a_4=\frac{1}{6}, a_5=a_6=\frac{1}{12}$$

であるため、このサイコロを2回続けて投げるとき、2回とも奇数の目が出る確率は、

$$\begin{aligned}(a_1+a_3+a_5)^2 &= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

であり、2回とも同じ目が出る確率は、

$$\begin{aligned}a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2 &= \left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{12}\right)^2+\left(\frac{1}{12}\right)^2 \\ &= \frac{7}{36}\end{aligned}$$

である。また、出た目の和が6となる確率は、

$$\begin{aligned}a_1a_5+a_2a_4+a_3a_3+a_4a_2+a_5a_1 &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{4} \\ &= \frac{11}{72}\end{aligned}$$

である。

(b)

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=1$ より、このサイコロを3回続けて投げるとき、1の目が1回も出ない確率は、

$$\begin{aligned}(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^3 &= (1-a_1)^3 \\ &= \left(1-\frac{1}{4}\right)^3 \\ &= \frac{27}{64}\end{aligned}$$

である。また、出た目の積が8となるには、1の目が1回、2の目が1回、4の目が1回出るか、もしくは、2の目が3回出ればよいため、出た目の積が8となる確率は、

$$\begin{aligned}3!\cdot a_1a_2a_4+a_2^3 &= 6\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{4}\right)^3 \\ &= \frac{5}{64}\end{aligned}$$

である。ここで、出た目の積が8であり、かつ、1の目が1回も出ないためには、サイコロの目は2が3回出ればよいため、出た目の積が8であり、かつ、1の目が1回も出ない確率は、

$$\begin{aligned}a_2^3 &= \left(\frac{1}{4}\right)^3 \\ &= \frac{1}{64}\end{aligned}$$

である。よって、出た目の積が8となる条件のもとで1の目が1回も出ない確率は、

$$\frac{\frac{1}{64}}{\frac{5}{64}}=\frac{1}{5}$$

である。

[2]

a は実数であり、

$$a_1=a_3=a_5=\frac{1}{6}-\frac{a}{2}, a_2=a_4=a_6=\frac{1}{6}+\frac{a}{2}$$

であるため、

$$\begin{aligned}a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 &= 3\cdot\left(\frac{1}{6}-\frac{a}{2}\right)+3\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{a}{2}\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

が成り立つ。よって、求める値の範囲は、

$$\begin{aligned}0 &< a_k < 1 \quad (k=1, 2, 3, 4, 5, 6) \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 0 < \frac{1}{6}-\frac{a}{2} < 1 \\ 0 < \frac{1}{6}+\frac{a}{2} < 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} -\frac{5}{3} < a < \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} < a < \frac{5}{3} \end{cases} \\ \therefore &-\frac{1}{3} < a < \frac{1}{3}\end{aligned}$$

である。ここで、このサイコロを3回続けて投げるとき、事象「出た目の最小値が4以下となる」の余事象「出た目の最小値が5か6となる」が起こる確率は、

$$\begin{aligned}(a_5+a_6)^3 &= \left\{\left(\frac{1}{6}-\frac{a}{2}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{a}{2}\right)\right\}^3 \\ &= \frac{1}{27}\end{aligned}$$

である。よって、出た目の最小値が4以下となる確率は、

$$1-\frac{1}{27}=\frac{26}{27}$$

である。また、出た目の最小値が4かつ出た目の最大値が6となるには、4の目が2回、6の目が1回出るか、4, 5, 6の目が1回ずつ出るか、もしくは、4の目が1回、6の目が2回出ればよいため、出た目の最小値が4かつ出た目の最大値が6となる確率は、

$$\begin{aligned}_3C_1\cdot a_4^2a_6+3!\cdot a_4a_5a_6+_3C_1\cdot a_4a_6^2 &= 3a_4a_6(a_4+2a_5+a_6) \\ &= 3\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{a}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{a}{2}\right)\cdot\left\{\left(\frac{1}{6}+\frac{a}{2}\right)+2\cdot\left(\frac{1}{6}-\frac{a}{2}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{a}{2}\right)\right\} \\ &= 2\left(\frac{1}{6}+\frac{a}{2}\right)^2\end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}2\left(\frac{1}{6}+\frac{a}{2}\right)^2 &> \frac{1}{9} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6}+\frac{a}{2} &< -\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6} < \frac{1}{6}+\frac{a}{2} \\ \Leftrightarrow a &< -\frac{\sqrt{2}+1}{3}, \frac{\sqrt{2}-1}{3} < a\end{aligned}$$

であるため、出た目の最小値が4かつ出た目の最大値が6となる確率が $\frac{1}{9}$ より大きくなるような a の値の範囲は、

$$\begin{aligned}&\begin{cases} 2\left(\frac{1}{6}+\frac{a}{2}\right)^2 > \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} < a < \frac{1}{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a < -\frac{\sqrt{2}+1}{3}, \frac{\sqrt{2}-1}{3} < a \\ -\frac{1}{3} < a < \frac{1}{3} \end{cases} \\ \therefore &\frac{\sqrt{2}-1}{3} < a < \frac{1}{3}\end{aligned}$$

である。