

(第3時限：80分)

2022年度 ③

選 択 科 目 (全59ページ)

問 題

	ページ
政治・経済	1～12
日 本 史	13～24
世 界 史	25～36
地 理	37～54
数 学	55～59

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答にあたっては、上記の科目から1科目を選択しなさい。
3. 解答はすべて別紙の解答用紙に記入しなさい。
4. 試験終了後、問題冊子・選択しなかった解答用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ、Ⅱ、Ⅲの設問について解答せよ。ただし、Ⅰ、Ⅱについては問題文中の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入せよ。なお、解答が分数になる場合は、すべて既約分数で答えること。

Ⅰ

〔1〕 図のように0から7までの番号のついた8つのマスがあり、次のルールに従うゲームがある。

ルール① 0番のマスを開始点とし、7番のマスを終点として、1個のさいころを投げて出た目の数だけ終点に向かってマスを進む。

ルール② 2回目以降は、直前の回に進んでとまったマスから、1個のさいころを投げて出た目の数だけ終点に向かってマスを進む。

ルール③ 終点に到達すればゲームは終了になる。さいころの出た目の数が終点までのマスの数より大きい場合もゲームは終了となる。

起点 0	1	2	3	4	5	6	終点 7
---------	---	---	---	---	---	---	---------

図

(a) 起点からゲームが終了するまでさいころを投げる回数が最も大きくなるのは ア 回で、その最大回数でゲームが終了する確率は イ (累乗で表すことも可とする) となる。

(b) 起点から2回だけさいころを投げてゲームが終了する確率は ウ である。

次に、ルール④を加えた場合を考える。

ルール④. 3番のマスにとまると、その時点でゲームが終了となる。

(c) 起点からさいころを1回以上投げて3番のマスにとまることでゲームが終了する確率は エ である。

(d) 起点からさいころを投げる回数が2回以内でゲームが終了した。このとき、終点まで到達して終了した確率は オ である。

[2] $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + 2n$ によって定められている数列 $\{a_n\}$ の一般項を以下の手順で求める。ただし、 カ から ソ までは数値で答えること。

まず、 $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと、数列 $\{b_n\}$ の初項は $b_1 =$ カ であり、 $b_{n+1} =$ キ $b_n +$ ク の関係が成り立つ。ゆえに、数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n =$ ケ $\times$ (コ) ^{n} $-$ サ となる。したがって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n =$ シ $\times$ (ス) ^{n} $-$ セ $n -$ ソ である。

[3] k は定数とする。

直線 $l: (2k+1)x + (k+2)y - 5k + 2 = 0$ と円 $C: x^2 + y^2 - 2x = 0$ がある。

直線 l は k の値にかかわらず、定点 (タ , チ) を通る。

また、円 C の中心の座標は (ツ , テ)、半径は ト であるので、直線 l が円 C に接するときの k の値は ナ または ニ である。その接点を P , Q とすると、直線 PQ の方程式は ヌ $= 0$ である。

Ⅱ ある企業の顧客向け電話相談窓口は、1人の従業員 A によって運営されている。
この電話相談窓口では、以下により応対を行う。

- ① 顧客の電話が着信した時刻に A が他の顧客と通話中でなければ、その顧客の電話が着信した時点から通話が開始される。
- ② 顧客の電話が着信した時刻に A が他の顧客と通話中であれば、その顧客は電話をつないだまま待機し、A と他の顧客との通話が終了した時点からその顧客との通話が開始される。
- ③ 他の顧客との通話が終了した時点で2人以上の顧客が待機している場合は、先に着信した顧客が優先される。
- ④ この電話相談窓口に通話する顧客は全員、着信してから A との通話が始まるまで待機し続ける。

例えば、午前9時0分に電話相談が開始されてから、1人目の着信が午前9時3分にあり2分間通話し、2人目の着信が午前9時4分にあり3分間通話したとする。この場合の1人目の待機時間は0分間、通話時間は2分間であり、2人目の待機時間は1分間、通話時間は3分間である。

表 ある日の10人の顧客への応対まとめ

ある日の午前9時0分から
の60分間に、A は10人の顧客に
応対した。右の表には、
着信順に顧客の通し番号を付
け、電話が着信した時刻、A
との通話時間をまとめている。
通し番号10の次の顧客の電
話が着信した時刻は10時0
分であった。

この日の午前9時0分から
の60分間の応対について考
える。

顧客の 通し番号	電話が着信 した時刻 (午前9時)	A との通話時間 (単位：分間)
1	0分	5
2	9分	6
3	11分	8
4	16分	7
5	22分	6
6	27分	3
7	31分	5
8	37分	4
9	46分	5
10	54分	2

〔1〕 顧客と A との通話時間の平均値は 分間、中央値は 分間、四分位範囲は 分間、標準偏差は 分間である。

〔2〕 通し番号 k ($k = 1, 2, 3, \dots, 9, 10$) の顧客の電話が着信した時刻から次の顧客の電話が着信した時刻までの時間を着信間隔 a_k として定義する。 a_k の平均値は 分間、標準偏差は 分間である。

〔3〕 待機時間が 0 分間でない顧客の数は 人である。また、A が応対した 10 人の待機時間の平均値は 分間である。

〔4〕 ここで、待機時間の平均値を減らすことを目的に 2 つのシステムを考えた。

(a) 10 人の顧客の電話が着信した時刻は表のデータのままで、従業員向けのマニュアルをわかりやすくすることなどにより、各顧客の通話時間を 1 分間だけ短くすることを考えた。このときの待機時間の平均値は 分間となり、 よりも 分間減らすことができる。

(b) 10 人の顧客の通話時間は表のデータのままで、通し番号 1 の顧客の電話が着信した時刻も午前 9 時 0 分のままとし、スマートフォンのアプリなどを用いた事前予約制にして着信間隔 a_k を 6 分間の一定間隔にすることを考えた。このときの待機時間の平均値は 分間となり、 よりも 分間減らすことができる。

Ⅲ a は正の定数とする。3 次関数 $f(x) = x(x-a)(x-3a)$, 2 次関数 $g(x) = x(x-3a)$, 1 次関数 $h(x) = -ax$ がある。このとき、次の問いに答えよ。

[1] 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = h(x)$ が原点で交わり、他の 1 点で接するときの a の値を求めよ。

[2] 関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で極大値, $x = \beta$ で極小値をとるとき, 2 点 $A(a, f(a))$, $B(\beta, f(\beta))$ を結ぶ線分 AB の中点 $M(x, y)$ の座標を a を用いて表せ。

[3] 直線 $y = h(x)$ が [2] で定めた点 M を通るときの a の値を求めよ。このとき, 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = h(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しいことを示せ。

[4] $a \geq 1$ とする。曲線 $y = f(x)$ と放物線 $y = g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるときの a の値を求めよ。

