

(第3時限：100分)

2022年度 ③

数 学 問 題

(理 系)

(全4ページ)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
3. 解答用紙1枚・下書用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを、
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ 自然数 m に対して、 m の 10 進法表記の各位の数字を逆順に並べて得られる自然数を m' とする。ただし、 m の末尾に 0 が続くとき、それは除外して並べる。例えば、 $m = 123$ のとき $m' = 321$ であり、 $m = 10200$ のとき $m' = 201$ である。

〔1〕 m が 2 桁の自然数であり、1 の位が a_1 、10 の位が a_2 であるとする。このとき、 m 、 m' を a_1 、 a_2 に関する四則計算を用いて表すと、 $m =$ ア ,
 $m' =$ イ となる。また、 $m - m'$ は常に ウ の倍数になる。

〔2〕 m が 3 桁の自然数であり、1 の位が a_1 、10 の位が a_2 、 10^2 の位が a_3 であるとする。このとき、 $m = m'$ であるための必要十分条件は、 $a_1 =$ エ が成り立つことであり、そのような m は オ 個存在する。

また、 $m - m'$ は常に カ の倍数であり、 $m - m'$ がとりうる最大の値は キ である。

〔3〕 n を 3 以上の自然数とする。 m が n 桁の自然数であり、 10^{k-1} の位が a_k であるとする ($k = 1, \dots, n$)。このとき、 $m = m'$ となるものは、 n が奇数のとき ク 個、 n が偶数のとき ケ 個存在する。

また、 n が奇数かつ a_1 、 a_n がともに偶数またはともに奇数であれば、 $m - m'$ は常に コ の倍数である。さらに、 $a_1 = a_n$ であれば、 $m - m'$ は常に サ の倍数である。

(注: ウ , カ , コ , サ はそれぞれ当てはまる自然数の中で最大のものである。)

Ⅱ 曲線 $y = f(x)$ を $f(x) = x \log x$ で定める。ただし、 $x > 0$ とし、 $\log x$ は x の自然対数である。

〔1〕 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めると、 $f'(x) = \boxed{\text{ア}}$ である。また、

$f'(x) = 0$ を満たす x の値は $\boxed{\text{イ}}$ であり、 $f(\boxed{\text{イ}}) = \boxed{\text{ウ}}$ となる。また、 $f(x)$ の不定積分を求めると、

$$\int f(x) dx = \boxed{\text{エ}} + C$$

である。ただし、 C は積分定数である。

〔2〕 $k > 0$ とする。直線 $y = kx$ と曲線 $y = f(x)$ の共有点の x 座標は $\boxed{\text{オ}}$ である。2直線 $y = kx$, $y = 0$ および曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を S_1 とし、2直線 $y = -kx$, $y = 0$ および曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき、 $S_1 = \boxed{\text{カ}}$, $S_2 = \boxed{\text{キ}}$ である。さらに $S_1 : S_2 = 5 : 1$ であるとき、 k の値は $\boxed{\text{ク}}$ であり、そのときの S_1 の値は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

〔3〕 $n = 1, 2, \dots$ に対して、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right) \log \left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

と定める。このとき、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ の値は $\boxed{\text{コ}}$ である。これを用いて、極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n+1}{n^2}} \times \left(\frac{n+2}{n}\right)^{\frac{n+2}{n^2}} \times \dots \times \left(\frac{n+n}{n}\right)^{\frac{n+n}{n^2}}$$

の値を求めると $\boxed{\text{サ}}$ である。

Ⅲ k を実数とし、 $f(z) = z^2 - kz + 1$ とおく。方程式

$$f(z) = 0 \quad (*)$$

が実数でない解をもつための必要十分条件は $\boxed{\text{ア}}$ である。このとき、方程式 $(*)$ の複素数の解は $z = \boxed{\text{イ}} \pm \boxed{\text{ウ}} i$ となる。ここで、 i は虚数単位を表し、 $\boxed{\text{イ}}$ は実数、 $\boxed{\text{ウ}}$ は正の実数である。さらに、

$$\left| \boxed{\text{イ}} \pm \boxed{\text{ウ}} i \right| = \boxed{\text{エ}}$$

である。 k が $\boxed{\text{ア}}$ を満たす範囲を動くとき、

$$\left| \boxed{\text{イ}} + \boxed{\text{ウ}} i - 3 - 4i \right|$$

の最小値は $\boxed{\text{オ}}$ である。

次に、 $f_2(z) = f(z^2)$ とおく。 $\boxed{\text{ア}}$ が成り立つとき、方程式 $f_2(z) = 0$ の複素数の解の中で最も偏角が小さいものを k を用いて表すと $\boxed{\text{カ}} + \boxed{\text{キ}} i$ である。ただし、偏角は 0 以上 2π 未満とする。3 以上の自然数 n について、 $f_n(z) = f(z^n)$ とおく。 $\boxed{\text{ア}}$ が成り立つとき、方程式 $f_n(z) = 0$ の複素数の解は $\boxed{\text{ク}}$ 個存在して、その中で虚部が正のものは $\boxed{\text{ケ}}$ 個である。また、 $f_n(z) = 0$ の各複素数の解に対して、それぞれの実部と虚部の和を考える。これらの中で最大の値を u_n とすると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \boxed{\text{コ}}$$

である。

Ⅳ 必ずしも各目の出る確率が等しいとは限らないサイコロがある。このサイコロを 1 回投げるとき、 k の目が出る確率を a_k とおく ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$)。ただし、

$$0 < a_k < 1, \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1$$

である。

〔1〕 $a_1 = a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = a_4 = \frac{1}{6}$, $a_5 = a_6 = \frac{1}{12}$ とする。

(a) このサイコロを 2 回続けて投げるとき、2 回とも奇数の目が出る確率は ア であり、2 回とも同じ目が出る確率は イ である。また、出た目の和が 6 となる確率は ウ である。

(b) このサイコロを 3 回続けて投げるとき、1 の目が 1 回も出ない確率は エ であり、出た目の積が 8 となる確率は オ である。また、出た目の積が 8 となる条件のもとで 1 の目が 1 回も出ない確率は カ である。

〔2〕 a を実数として、

$$a_1 = a_3 = a_5 = \frac{1}{6} - \frac{a}{2}, \quad a_2 = a_4 = a_6 = \frac{1}{6} + \frac{a}{2}$$

とする。実数 a のとりうる値の範囲は キ $< a <$ ク である。このサイコロを 3 回続けて投げるとき、出た目の最小値が 4 以下となる確率は ケ である。また、出た目の最小値が 4 かつ出た目の最大値が 6 となる確率は コ であり、この確率が $\frac{1}{9}$ より大きくなるような a の値の範囲は サ $< a <$ シ である。

