

(第3時限：80分)

2022年度 ⑤

選 択 科 目 (全55ページ)

問 題

	ページ
政治・経済	1～12
日 本 史	13～24
世 界 史	25～38
地 理	39～50
数 学	51～55

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答する科目

受験学部	解答する科目
経済学部	「数学」を解答すること
上記以外の学部	政治・経済、日本史、世界史、地理、数学 から1科目選択

(注) 受験学部を受験票で十分に確認すること。

3. 解答はすべて別紙の解答用紙に記入しなさい。
4. 試験終了後、問題冊子・選択しなかった解答用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ、Ⅱ、Ⅲの設問について解答せよ。ただし、Ⅰ、Ⅱについては問題文中の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入せよ。なお、解答が分数になる場合は、すべて既約分数で答えること。

Ⅰ

〔1〕 $0 < s < 1$, $0 < t < 1$ とする。 $\triangle ABC$ について、辺 AB を $s : (1 - s)$ に内分する点を L , 辺 AC を $t : (1 - t)$ に内分する点を M , BM と CL の交点を P とする。

$LP : PC = 2 : 1$, $MP : PB = 1 : 3$ であるとき、 s と t を求める。点 P は LC を $2 : 1$ に内分する点であるから、これを s を用いて示すと、

$\overrightarrow{AP} = \text{ア} s \overrightarrow{AB} + \text{イ} \overrightarrow{AC}$ となる。また、点 P は BM を $3 : 1$ に内分する点でもあるので、これを t を用いて示すと、

$\overrightarrow{AP} = \text{ウ} \overrightarrow{AB} + \text{エ} t \overrightarrow{AC}$ となる。したがって、 $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ で、 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は平行でないから、 $s = \text{オ}$, $t = \text{カ}$ となる。

次に AP の延長線と辺 BC との交点を N とする。

$BN : NC = u : (1 - u)$ であるとき、 u を求める。このとき、

$\overrightarrow{AN} = (1 - u) \overrightarrow{AB} + u \overrightarrow{AC}$ となる。また、 $\overrightarrow{AN}$ は $\overrightarrow{AP}$ の定数倍であり、点 N は BC 上にあることより、 $\overrightarrow{AN} = \text{キ} \overrightarrow{AP}$ となる。したがって、

$u = \text{ク}$ となる。

〔2〕 3次関数 $y = x^3 + 6x - 2$ について、その導関数は $y' = \boxed{\text{ケ}}$ である。

常に $y' > 0$ であるから、関数 y は実数全体で単調に増加する。

したがって、3次方程式 $x^3 + 6x - 2 = 0$ …… ①

の実数解は1つである。この実数解を次の方法で求めることを考える。

①の解を $x = \alpha + \beta$ とおくと、

①は $\alpha^3 + \beta^3 - \boxed{\text{コ}} + 3(\alpha + \beta)(\alpha\beta + \boxed{\text{サ}}) = 0$ …… ② となる。

ただし、 $\boxed{\text{コ}}$ 、 $\boxed{\text{サ}}$ は数値を入れよ。

ここで、連立方程式

$$\begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 - \boxed{\text{コ}} = 0 & \cdots \cdots \text{③} \\ \alpha\beta + \boxed{\text{サ}} = 0 & \cdots \cdots \text{④} \end{cases}$$

を満たす α 、 β は②を満たすので、③、④を解けばよい。

③、④を解いて、 $\alpha^3 = \boxed{\text{シ}}$ 、 $\beta^3 = \boxed{\text{ス}}$ (ただし、 $\alpha^3 > \beta^3$) を得る。

ここで、 $\alpha + \beta$ が実数となるものを考えると、 $\alpha = \boxed{\text{セ}}$ 、 $\beta = -\boxed{\text{ソ}}$

である。よって、3次方程式①の実数解は $x = \boxed{\text{セ}} - \boxed{\text{ソ}}$ である。

〔3〕 自然数 n に対して、 n の正の約数の個数を記号 $A(n)$ と表す。

例えば、 $A(6) = 4$ である。

このとき、 $A(39) = \boxed{\text{タ}}$ 、 $A(50) = \boxed{\text{チ}}$ である。また、 k を自然数、 p 、 q を異なる素数とすると、

$A(pq) = \boxed{\text{ツ}}$ 、 $A(p^k) = \boxed{\text{テ}}$ である。

次に、 m を $1 \leq m \leq 200$ を満たす整数とすると、 $A(m) = 5$ である m は $\boxed{\text{ト}}$ 個、 $A(m) = 8$ である m は $\boxed{\text{ナ}}$ 個ある。

Ⅱ アパートやワンルームマンションなど賃貸住宅物件の月額家賃は、条件となる数値を使って対数などを用いて表せることが知られている。ある調査によると、ある都市の賃貸住宅物件の月額家賃 y (単位：円) は次の3つの条件、すなわち物件の住宅面積 x_1 (単位： m^2)、建物が完成した後の経過年数としての築後年数 x_2 (単位：年)、および都心までの距離 x_3 (単位：km) で決まることがわかった。これによると、 y は x_1, x_2, x_3 を用いて式①で表される。ただし、 y, x_1, x_2, x_3 はすべて正の実数とする。

$$\log_3 y = \frac{1}{2} \log_3 x_1 - \frac{1}{100} \log_3 x_2 - \frac{x_3}{10} + 10 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

y : 月額家賃 (円)

x_1 : 住宅面積 (m^2)

x_2 : 築後年数 (年)

x_3 : 都心までの距離 (km)

$-\frac{x_3}{10}$ と 10 を 3 を底とする対数で表すと、

$-\frac{x_3}{10} = \log_3 3^{\text{ア}}$, $10 = \log_3 3^{\text{イ}}$ であるので、式①から、

$$y = \frac{x_1^{\text{ウ}} \cdot 3^{\text{エ}}}{x_2^{\text{オ}}} \quad \cdots \cdots \text{②}$$

となる。

以下、必要であれば、 $10^{\frac{1}{100}} = 1.023$, $20^{\frac{1}{100}} = 1.030$, $25^{\frac{1}{100}} = 1.033$ として計算せよ。

〔1〕 住宅面積 25 m^2 , 都心までの距離 10 km にある物件が、築後年数 1 年である場合、月額家賃は カ 円である。

〔2〕 住宅面積 25 m^2 ，都心までの距離 10 km のように〔1〕と同じ条件だが，築後年数が 20 年の物件の場合の月額家賃は，小数点以下を切り捨てると キ 円となる。

〔3〕 次に，同じ年に建設された異なる 2 つの物件を比較する。 2 つの物件の都心までの距離と築後年数はそれぞれ等しい。この場合，住宅面積の比が $1 : 2$ であれば，家賃の比は $1 :$ ク になる。

〔4〕 異なる場所にある 2 つの物件 P, Q を比較する。 2 つの物件の築後年数は等しいが，都心までの距離は， P が $a \text{ km}$ ， Q が $a^2 \text{ km}$ であり ($a > 1$)， P と Q の住宅面積の比が $1 : 2$ のとき，これら 2 つの物件の月額家賃が等しくなった。このとき，

$$a = \frac{\text{ケ} + \sqrt{\text{コ} + \text{サ} \log_3 2}}{2}$$

となる。

Ⅲ 座標平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円と点 $A(1, 0)$ がある。

$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ の範囲で、この円周上に $\angle AOP = \theta$ となる点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ をとり、さらに、点 $Q(-\sin \theta, \cos \theta)$ をとる。このとき、2点 R, S を $R(\cos \theta - \sin \theta, \cos \theta + \sin \theta)$, $S(\cos \theta - \sin \theta, 0)$ とし、 $\triangle RQS$ の面積を T とおく。次の問いに答えよ。

〔1〕 $\angle POQ$ を求めよ。

〔2〕 面積 T の最大値と、そのときの θ の値を求めよ。

〔3〕 面積 T が最大になるとき、直線 PQ の傾きを求めよ。

