（第２時限：100分）

2022年度　⑥

数　学　問　題

（理　　系）

（全７ページ）

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
3. 解答用紙１枚・下書用紙２枚は，この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後，問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数　学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の ［　　］ に当てはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。なお，分数を記入する際は，既約分数を記入しなさい。

Ⅰ　座標平面上に，放物線 $C: y = x^2$ と点A$(a,\ -2)$がある。ただし，aは実数とし，点Pを放物線C上を動く点とする。

（注：解答するにあたって，式に関する空欄で，係数が負になる場合や1または－1になる場合，また定数項が負になる場合，$y =$ ［ 1 ］ $x +$ ［ －2 ］ のように，空欄に負の値や1または－1を記すこと。）

〔1〕　点B$(1,\ 0)$と点Aを通る直線をlとするとき，直線lと放物線Cが少なくとも1つの共有点を持つための必要十分条件は，$a \geqq$ ［ ア ］ である。特に，放物線Cと直線lが接するとき，その共有点の座標は（ ［ イ ］ ， ［ ウ ］ ）である。

〔2〕　$a = 7$ とする。点Aと点Pの距離は点Pの座標が（ ［ エ ］ ， ［ オ ］ ）のとき，最小値 ［ カ ］ をとる。

〔3〕　線分APの中点をQとする。このとき，点Qの軌跡C_1はaを用いて表すと，

$$y = \boxed{キ}\left(x + \boxed{ク}\right)^2 + \boxed{ケ}$$

である。次に，軌跡C_1上を動く点と点Aを結んだ線分の中点の軌跡C_2は，

$$y = \boxed{コ}\left(x + \boxed{サ}\right)^2 + \boxed{シ}$$

である。

さらに，軌跡 C_2 上を動く点と点Aを結んだ線分の中点の軌跡を C_3 とする。同様に軌跡 C_4，C_5，…，C_N を求める。ただし，N は自然数である。

$2^N = t$ として，軌跡 C_N を，N を用いずに a，t を用いて表すと，

$$y = \boxed{\text{ス}}\left(x + \boxed{\text{セ}}\right)^2 + \boxed{\text{ソ}}$$

となる。

〔4〕〔3〕で求めた軌跡 C_N において，y 座標が最小である点をR，軌跡 C_N が x 軸と交わる点をS，Tとする。このとき，△RSTの面積を t を用いて表すと，$\boxed{\text{タ}}$ となる。この△RSTの面積は $N = \boxed{\text{チ}}$ のときに最大となる。

Ⅱ　自然数 n に対して，図２－１のような図形 D_n で表される道のある町を考える。図２－１のように，町 D_{n+1} の道は町 D_n の一番右上の区画に十字の道を新たに設置することで作られる。

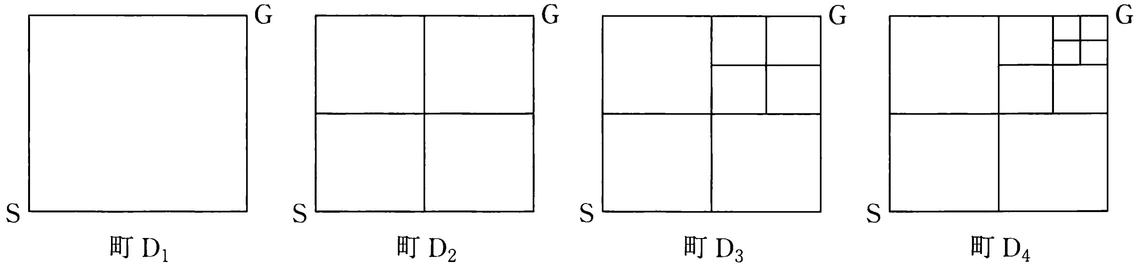


図２－１

（注：解答するにあたって，式に関する空欄で，係数が負になる場合や１または－１になる場合，また定数項が負になる場合，$y =$ [1] $x +$ [－2] のように，空欄に負の値や１または－１を記すこと。）

〔１〕　町 D_n に関してスタート地点Ｓからゴール地点Ｇへの最短経路が何通りあるかを考える。町 D_n においてＳからＧに至る最短経路の数を A_n とする。このとき，$A_1 =$ [ア]，$A_2 =$ [イ]，$A_3 =$ [ウ]，$A_4 =$ [エ] となる。

さらに，図２－２に示すように町 D_{n+1} の右上の区画（灰色で示された部分）が町 D_n と相似であることに着目して，A_{n+1} と A_n の関係を考える。なお，図２－２の点線は繰り返しを表す。

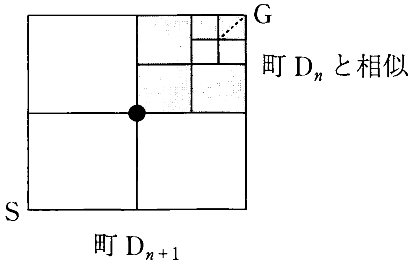


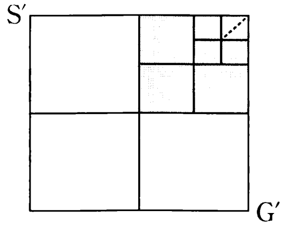
図２－２

地点SからGへと向かう経路は，図２－２の黒丸を通る場合と通らない場合に分類できる。このことから，A_{n+1} を A_n を用いて表すと，

$$A_{n+1} = \boxed{\text{オ}}\, A_n + \boxed{\text{カ}}$$

となる。ゆえに，数列 $\{A_n\}$ の一般項は $A_n = \boxed{\text{キ}}$ である。

〔２〕 図２－３に示すように，町 D_n の左上の地点をS′，右下の地点をG′とし，スタート地点S′からゴール地点G′への最短経路が何通りあるかを考える。



町 D_n

図２－３

この町 D_n における地点S′から地点G′への最短経路の数を B_n とするとき，B_{n+1} を B_n を用いて表すと，

$$B_{n+1} = \boxed{\text{ク}}\, B_n + \boxed{\text{ケ}}$$

となる。ゆえに，数列 $\{B_n\}$ の一般項は $B_n = \boxed{\text{コ}}$ である。

〔3〕 図2－4に示す図形で表される町Xと町Yについて考える。スタート地点Sからゴール地点Gへの最短経路は，町Xでは サ 通り，町Yでは シ 通りある。

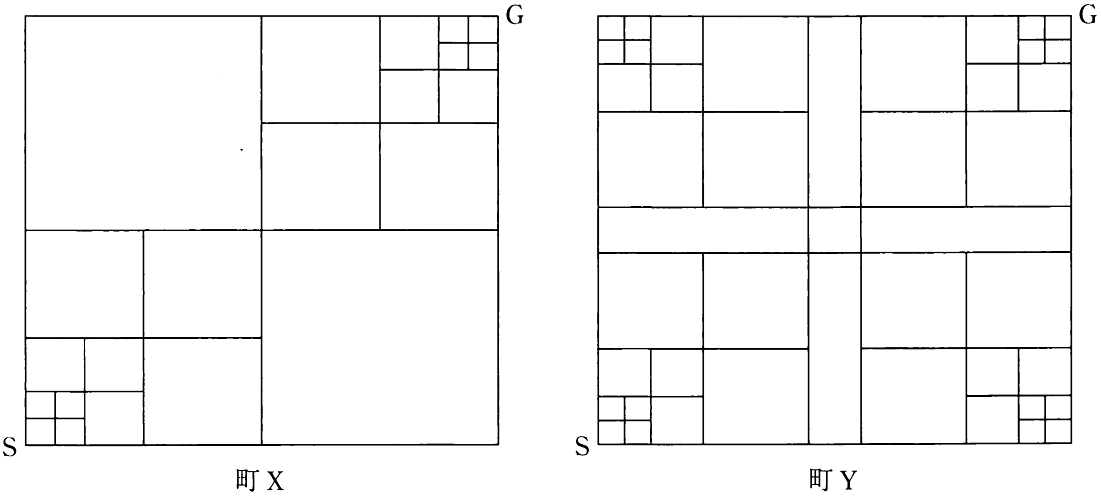


図2－4

Ⅲ a は正の定数とする。座標平面上において，図3－1に示すような曲線 C_1 は，媒介変数 θ を用いて $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$，$y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$ と表される。ただし，$\theta > 0$ とする。

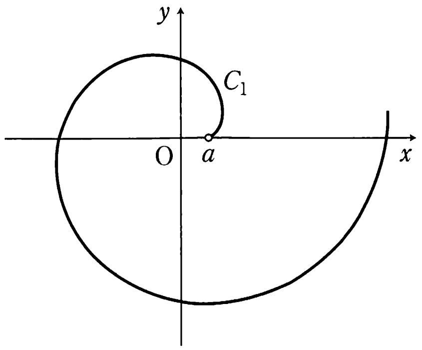


図3－1

〔1〕 $0 < \theta \leqq 2\pi$ の範囲において，曲線 C_1 の x，y がとりうる範囲はそれぞれ，
［ア］ $\leqq x \leqq$ ［イ］，［ウ］ $\leqq y \leqq$ ［エ］である。

〔2〕 $0 < a < 1$ のときを考える。$a^2 \leqq \theta \leqq a$ の範囲において，曲線 C_1 の長さが最大となるとき，$a =$ ［オ］であり，その長さは［カ］である。

〔3〕 曲線 C_1 上の任意の点 $\mathrm{P}(a(\cos\theta + \theta\sin\theta),\ a(\sin\theta - \theta\cos\theta))$ における法線の方程式 l は［キ］で表される。次に，原点Oを中心とする半径 a の円 C_2 を考えると，点Pにおける法線 l は円 C_2 と接し，その接点は点Q $(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$ となる。このことから，点Pが曲線 C_1 上を動くとき，法線 l が通過しない領域は，θ を用いずに表すと，［ク］である。また，点Pと点Qの距離は，θ を用いて表すと，［ケ］となる。

Ⅳ　座標空間において，4点A(1，0，1)，B(a，a，0)，C(2，1，−1)，D($4b^2+2$，$-b$，$4b^2+3$)がある。ただし，a，bは実数とする。

〔1〕 $\overrightarrow{AB}$の大きさと$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$の内積をaを用いて表すと，$|\overrightarrow{AB}|$ = [ア]，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ = [イ]である。このことから，△ABCの面積Sは，S = [ウ]となるので，Sはa= [エ]のとき最小となり，最小値は[オ]である。

〔2〕 $\overrightarrow{AB}$に垂直かつ$\overrightarrow{AC}$に垂直な大きさ1のベクトルのうち，z成分が正のものを$\vec{n}$とおくと，$\vec{n}$はaを用いて，

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{8a^2-16a+11}}\left(\boxed{カ},\ \boxed{キ},\ \boxed{ク}\right)$$

と表される。

このことから，点Dから3点A，B，Cを通る平面に下ろした垂線の長さLは，a，bを用いて，

$$L=\frac{1}{\sqrt{8a^2-16a+11}}\left(\boxed{ケ}\right)$$

と表され，四面体ABCDの体積Vは，V = [コ]となる。

また，$a>0$，$b>0$，$a=\dfrac{1}{2b}$の条件を満たすとき，Vの最小値は，a，bを用いずに表すと，[サ]である。