

I

【解答】

〔1〕	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
	2	$\frac{\pi}{6}$	3	5	$\frac{7}{6}\pi$	$2 \leq a < 4$
〔2〕	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	$3a-1$	8	4	2	$\frac{1}{3}$	7
〔3〕	ス	セ	ソ	タ		
	855	$4\sqrt{2}$	7	8		

【解説】

〔1〕

倍角の公式より、

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}f(x) &= 2 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 4 \cos^2 x \\ &= 2 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sin 2x}{2} + 4 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) + 3 \\ &= 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + 3\end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 \leq x < 2\pi$ より $\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} < 4\pi + \frac{\pi}{6}$ であるから、この範囲において

$-1 \leq \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$ となる。よって、 $f(x)$ の最大値は

$$\begin{aligned}\sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{6} &= \frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2} \left(\because \frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} < 4\pi + \frac{\pi}{6} \right) \\ \therefore x &= \frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi\end{aligned}$$

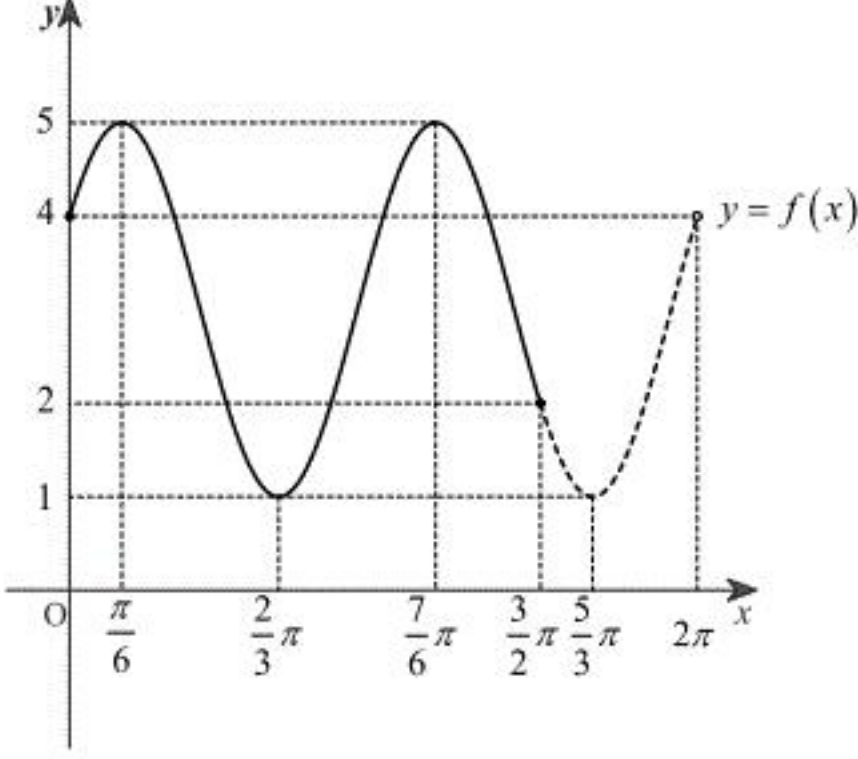
のとき、

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{7}{6}\pi\right) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$$

であり、 $f(x)$ が最大値をとる x の中で最も大きな値は $x = \frac{7}{6}\pi$ である。また、方程式 $f(x) = a$

の異なる実数解の個数は、 $y = f(x)$ と $y = a$ のグラフの共有点の個数と一致する。ここで、

$2x + \frac{\pi}{6} = 2 \left(x + \frac{\pi}{12} \right)$ より、 $0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ における $y = f(x)$ のグラフは下図の実線部である。



よって、上図より、方程式 $f(x) = a$ の $0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ における異なる実数解の個数は、

$$\begin{cases} a < 1, a > 5 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ a = 1 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ 1 < a < 2, a = 5 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ 2 \leq a < 4 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ 4 \leq a < 5 \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \end{cases}$$

となる。したがって、 $f(x) = a$ の異なる実数解が $0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ に3つあるような a の値の範囲

は

$$2 \leq a < 4$$

である。

〔2〕

$$\begin{aligned}2^{x+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} &= 8^a \\ \Leftrightarrow 2 \cdot 2^x - \frac{2^4}{2^x} &= 2^{3a} \\ \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^{3a-1} \cdot 2^x - 8 &= 0 \quad (\because 2^x > 0)\end{aligned}$$

であるから、 $t = 2^x$ とすると、

$$t^2 - 2^{3a-1} \cdot t - 8 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。ここで、 t の取りうる値の範囲は $t > 0$ であるから、 $a = \frac{2}{3}$ のとき、

$$\begin{aligned}t^2 - 2t - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t+2)(t-4) &= 0 \\ \therefore t &= 4 \quad (\because t > 0)\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}t &= 4 \\ \Leftrightarrow 2^x &= 4 \\ \therefore x &= 2\end{aligned}$$

となる。また、 $x = 3$ が①の解となるとき $t = 8$ が②の解となるから、②に $t = 8$ を代入すると、

$$\begin{aligned}64 - 2^{3a-1} \cdot 8 - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow 8 - 2^{3a-1} - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2^{3a-1} &= 7 \\ \Leftrightarrow 3a - 1 &= \log_2 7 \\ \therefore a &= \frac{1}{3}(1 + \log_2 7)\end{aligned}$$

となる。

〔3〕

与えられた表より、 $x_1 = 181$, $x_1 - \bar{x} = 10$ であるから、

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x_1 - (x_1 - \bar{x}) \\ &= 181 - 10 \\ &= 171\end{aligned}$$

である。よって、身長合計は $5\bar{x} = 855$ (cm) となる。また、身長の標準偏差は

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} &= \sqrt{\frac{1}{5} \cdot 160} \\ &= 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

であり、同様にして体重の標準偏差も $4\sqrt{2}$ である。したがって、身長と体重の共分散は

$$\begin{aligned}\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) &= \frac{140}{5} \\ &= 28\end{aligned}$$

であるから、身長と体重の相関係数は

$$\frac{28}{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{7}{8}$$

となる。

II

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
$3ax - 2a$	$-\frac{1}{3a}x + a + \frac{1}{3a}$	$\frac{3}{4}a$	$6a$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{9}$

【解説】

曲線 $C: y = ax^3$ について、

$$y' = 3ax^2$$

であるから、接線 ℓ_1 の方程式は

$$\begin{aligned} y - a &= 3a(x - 1) \\ \Leftrightarrow y &= 3ax - 2a \end{aligned}$$

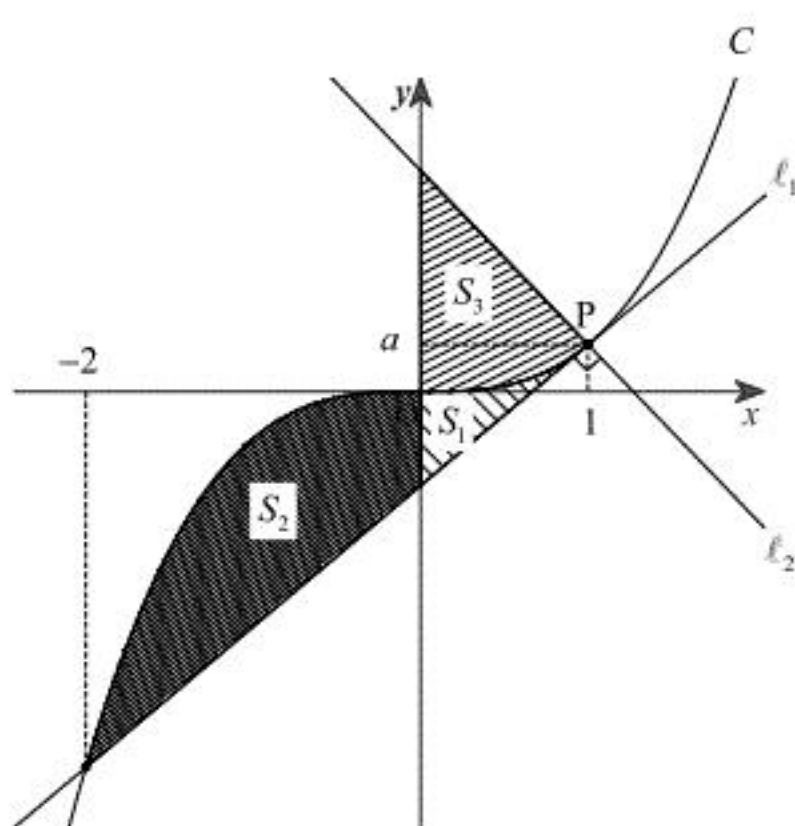
となる。また、 $a > 0$ より接線 ℓ_1 と直交する接線 ℓ_2 の傾きは $-\frac{1}{3a}$ であるから、接線 ℓ_2 の方程式は

$$\begin{aligned} y - a &= -\frac{1}{3a}(x - 1) \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{1}{3a}x + a + \frac{1}{3a} \end{aligned}$$

となる。よって、 C と ℓ_1 の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} ax^3 &= 3ax - 2a \\ \Leftrightarrow a(x - 1)^2(x + 2) &= 0 \\ \therefore x &= -2, 1 \end{aligned}$$

となり、 $a > 0$ に注意すると C , ℓ_1 , ℓ_2 のグラフは下図のようになる。



以上より、 S_1 , S_2 , S_3 はそれぞれ上図で示した部分の面積であるから、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 \{ax^3 - (3ax - 2a)\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}ax^4 - \frac{3}{2}ax^2 + 2ax \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4}a - \frac{3}{2}a + 2a \\ &= \frac{3}{4}a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-2}^0 \{ax^3 - (3ax - 2a)\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}ax^4 - \frac{3}{2}ax^2 + 2ax \right]_{-2}^0 \\ &= -(4a - 6a - 4a) \\ &= 6a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \int_0^1 \left\{ \left(-\frac{1}{3a}x + a + \frac{1}{3a} \right) - ax^3 \right\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{6a}x^2 + \left(a + \frac{1}{3a} \right)x - \frac{1}{4}ax^4 \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{6a} + \left(a + \frac{1}{3a} \right) - \frac{1}{4}a \\ &= \frac{1}{6a} + \frac{3}{4}a \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\frac{1}{6a} > 0$, $\frac{3}{4}a > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の関係より

$$S_3 = \frac{1}{6a} + \frac{3}{4}a \geq 2\sqrt{\frac{1}{6a} \cdot \frac{3}{4}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

となり、等号が成り立つのは、

$$\begin{aligned} \frac{1}{6a} &= \frac{3}{4}a \\ \Leftrightarrow a^2 &= \frac{2}{9} \quad (\because a \neq 0) \\ \therefore a &= \frac{\sqrt{2}}{3} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

のときである。また、 $S_1 + S_3 = S_2$ が成り立つとき、

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}a + \left(\frac{1}{6a} + \frac{3}{4}a \right) &= 6a \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6a} &= \frac{9}{2}a \\ \Leftrightarrow a^2 &= \frac{1}{27} \quad (\because a \neq 0) \\ \therefore a &= \frac{\sqrt{3}}{9} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

である。

Ⅲ

〔解答〕

〔1〕	ア	イ	ウ	エ						
	$2\sqrt{2}$	4	6	$2+2\sqrt{2}$						
〔2〕	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
	$2+\sqrt{2}$	6	0	$2+2\sqrt{2}$	6	$\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	6	$2\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{2}$

〔解説〕

〔1〕

OA=4 のとき、

$$\sqrt{2^2+2^2+p^2}=4$$

$$\Leftrightarrow 4+4+p^2=16$$

$$\Leftrightarrow p^2=8$$

$$\therefore p=2\sqrt{2} \quad (\because p>0)$$

となる。また、線分 BC は y 軸に平行であり、線分 CG は z 軸に平行であるから、

BC=4, CG=2 のとき、G の座標は

$$(4, 6, 2+2\sqrt{2})$$

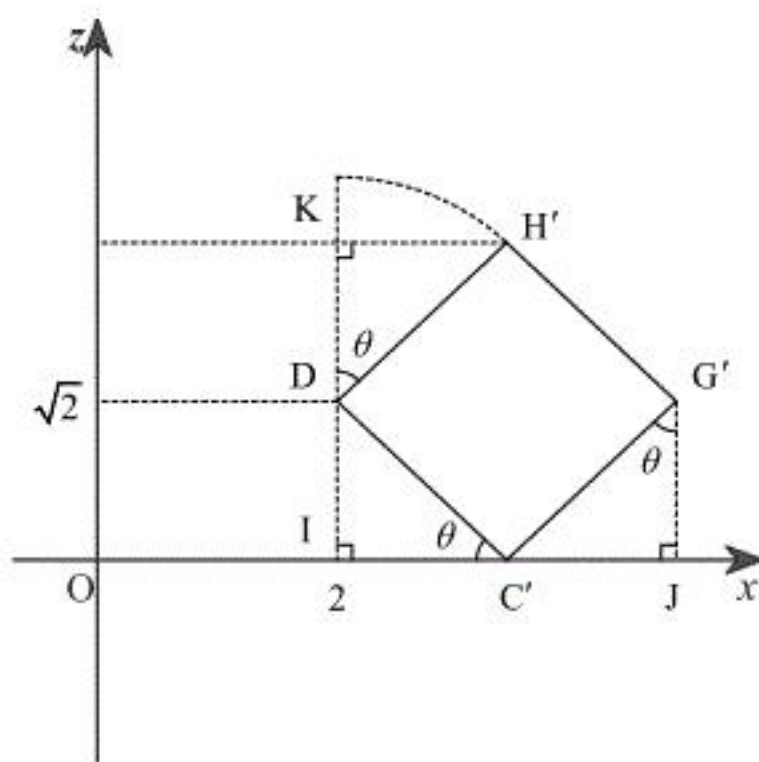
となる。

〔2〕

〔1〕と同様に考えると、 $\frac{p}{2}=\sqrt{2}$ より、〔1〕の直方体を z 軸の負の方向に $\frac{p}{2}$ だけ平行移動し

た後の A の座標は $(2, 2, \sqrt{2})$ であり、D の座標は $(2, 6, \sqrt{2})$ である。よって、直方体を回転し

た後の平面 $y=6$ における断面は下図の通りである。



ここで、D, G' から xy 平面に下ろした垂線の足をそれぞれ I, J とし、H' を通り x 軸に平行な

直線と直線 DI との交点を K とする。また、移動後の頂点 C の座標を、実数 x を用いて

$(x, 6, 0)$ とすると、 $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ より $x \geq 2$ である。よって、 $C'D=AB=2$ であるから、

$$\sqrt{(2-x)^2+(2-2)^2+(\sqrt{2}-0)^2}=2$$

$$\Leftrightarrow (x^2-4x+4)+0+2=4$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+2=0$$

$$\therefore x=2+\sqrt{2} \quad (\because x \geq 2)$$

となり、頂点 C は $C'(2+\sqrt{2}, 6, 0)$ に移る。また、 $C'D=C'G'=2$ より、四角形 $C'DH'G'$ は正方形

であり、 $\angle IC'D=\angle JG'C'=\angle KDH'=\theta$ であるから、 $\triangle C'ID$, $\triangle G'JC'$, $\triangle DKH'$ は斜辺と1つの

鋭角が等しい直角三角形となる。したがって、 $\triangle C'ID \cong \triangle G'JC' \cong \triangle DKH'$ より、

$$IC'=JG'=KD=\sqrt{2}$$

$$ID=JC'=KH'=\sqrt{2}$$

であるから、頂点 G は $G'(2+2\sqrt{2}, 6, \sqrt{2})$ に移り、頂点 H は $H'(2+\sqrt{2}, 6, 2\sqrt{2})$ に移る。また、

$\triangle DKH'$ について、 $KD=\sqrt{2}$, $KH'=\sqrt{2}$, $DH'=2$ であるから、

$$\theta=\angle KDH'=45^\circ$$

である。以上より、頂点 H が H' まで動くときに描く軌跡の長さは

$$\frac{p}{2}+DH'\cdot\theta=\frac{\pi}{2}+\sqrt{2}$$

となる。

Ⅳ

【解答】

〔 1 〕	ア	イ	ウ	エ
	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$
〔 2 〕	オ	カ	キ	ク
	$\frac{17}{50}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$
〔 3 〕	ケ	コ	サ	シ
	1	$\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^n$	$\frac{1}{4}\left\{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}$

【解説】

〔1〕

1時間培養後、容器の中にはAが2個、Bが3個いるから、

$$P_{A(1)}=\frac{2}{2+3}=\frac{2}{5}$$

$$P_{AA(1)}=\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$$

$$P_{AB(1)}=\frac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{5}$$

$$P_{BB(1)}=\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$$

となる。

〔2〕

2回目培養後に抽出した1個の個体がAであるとき、1回目培養後にAを2個抽出するか、または、1回目培養後にAとBを1個ずつ抽出し、かつ2回目培養後にAを抽出すればよいから、

$$\begin{aligned}P_{A(2)}&=P_{AA(1)}+P_{AB(1)}\cdot P_{A(1)}\\&=\frac{1}{10}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\\&=\frac{17}{50}\end{aligned}$$

となる。また、同様に考えると、

$$\begin{aligned}P_{AA(2)}&=P_{AA(1)}+P_{AB(1)}\cdot P_{AA(1)}\\&=\frac{1}{10}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{10}\\&=\frac{4}{25}\\P_{AB(2)}&=P_{AB(1)}\cdot P_{AB(1)}\\&=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\\&=\frac{9}{25}\\P_{BB(2)}&=P_{AB(1)}\cdot P_{BB(1)}+P_{BB(1)}\\&=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\\&=\frac{12}{25}\end{aligned}$$

となる。

〔3〕

〔2〕と同様に考えると、

$$\begin{aligned}P_{AA(n)}&=P_{AA(n-1)}+P_{AB(n-1)}\cdot P_{AA(1)}\\&\Leftrightarrow P_{AA(n)}=1\cdot P_{AA(n-1)}+\frac{1}{10}\cdot P_{AB(n-1)}\qquad\qquad\qquad\cdot\cdot\cdot\textcircled{1}\\P_{AB(n)}&=P_{AB(n-1)}\cdot P_{AB(1)}\\&\Leftrightarrow P_{AB(n)}=\frac{3}{5}\cdot P_{AB(n-1)}\qquad\qquad\qquad\cdot\cdot\cdot\textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。よって、②より、数列 $\{P_{AB(n)}\}$ は初項 $\frac{3}{5}$ 、公比 $\frac{3}{5}$ の等比数列であるから、 $P_{AB(n)}=\left(\frac{3}{5}\right)^n$ である。また、これを①に代入すると、

$$P_{AA(n)}=P_{AA(n-1)}+\frac{1}{10}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

であるから、 $n\geq 2$ より

$$\begin{aligned}P_{AA(n)}&=P_{AA(1)}+\sum_{k=2}^n\frac{1}{10}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}\\&=\sum_{k=1}^n\frac{1}{10}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}\\&=\frac{1}{10}\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\frac{3}{5}}\\&=\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}\end{aligned}$$

となり、これは $n=1$ のときも成立する。したがって、 $n\geq 2$ において、

$$\begin{aligned}P_{A(n)}&=P_{AA(n-1)}+P_{AB(n-1)}\cdot P_{A(1)}\\&=\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}+\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\cdot\frac{2}{5}\\&=\frac{1}{4}\left\{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}\end{aligned}$$

となる。