

〔1〕

(1)

$$\begin{aligned} (1) \quad \overline{AB} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{より,} \\ \left| \overline{AB} \right| &= \sqrt{5^2 + 4^2} = \boxed{\sqrt{41}}_{\text{テ}} \\ (2) \quad \overline{AE} &= 3\overline{AB} \text{より,} \\ \overline{OE} &= \overline{OA} + \overline{AE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 17 \end{pmatrix} \\ \text{であるから,} \quad E &\left(\boxed{17}_{\text{イ}}, \boxed{17}_{\text{ロ}} \right) \\ (3) \quad ABFC \text{ が平行四辺形であることから,} \quad \overline{CF} &= \overline{AB} \text{より,} \\ \overline{OF} &= \overline{OC} + \overline{CF} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \text{したがって,} \quad F &\left(\boxed{16}_{\text{エ}}, \boxed{6}_{\text{オ}} \right) \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \overline{OG} &= \overline{OA} + s\overline{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5s \\ 5+4s \end{pmatrix} \\ \text{かつ,} \\ \overline{OG} &= \overline{OC} + t\overline{CD} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11-8t \\ 2+12t \end{pmatrix} \\ \text{であるから,} \\ \begin{cases} 2+5s = 11-8t \\ 5+4s = 2+12t \end{cases} \\ \text{よって,} \\ s &= \frac{21}{23}, t = \boxed{\frac{51}{92}}_{\text{カ}} \end{aligned}$$

である.

$$\text{ゆえに,} \quad \overline{OG} = \begin{pmatrix} \frac{151}{23} \\ \frac{199}{23} \end{pmatrix}$$

であるから,

$$G \left(\boxed{\frac{151}{23}}_{\text{キ}}, \boxed{\frac{199}{23}}_{\text{ク}} \right)$$

〔2〕

(1)

$$2024 = \boxed{2}_{\text{ケ}} \times \boxed{2}_{\text{コ}} \times \boxed{2}_{\text{サ}} \times \boxed{11}_{\text{シ}} \times \boxed{23}_{\text{ス}}$$

(2) $n = \sqrt{2024k}$ が整数となるための条件は, (1)より,

$$k = 2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot l^2 \quad (l \text{ は自然数})$$

と表されることである.

$$\begin{aligned} \text{またこのとき,} \\ n &= 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot l \\ &= 1012l \end{aligned} \qquad \text{.....①}$$

と表される.

$$\begin{aligned} \text{ここで, } n \text{ が4桁の整数となるとき,} \\ 1000 \leq n \leq 9999 \end{aligned}$$

が必要であるから,

$$\begin{aligned} \frac{1000}{1012} \leq l \leq \frac{9999}{1012} &= 9 + \frac{891}{1012} \\ 1 \leq l \leq 9 \end{aligned}$$

したがって, n が4桁の整数となるとき, n の最大値は,

$$n = 1012 \cdot 9 = \boxed{9108}_{\text{セ}}$$

であり, 最小値は

$$n = 1012 \cdot 1 = \boxed{1012}_{\text{ソ}}$$

である.

また, ①より, n は正の整数 p, q, r ($p \geq 2, q \geq 1, r \geq 1$) と2, 11, 23を素因数に持たない整数 S を用いて,

$$n = 2^p \cdot 11^q \cdot 23^r \cdot S$$

と表せる.

ここで, $S \geq 3$ とすると, n の正の約数の個数 A は,

$$A \geq (2+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 24 > 20$$

となるから. $S = 1$

よって,

$$n = 2^p \cdot 11^q \cdot 23^r$$

と表されるから,

$$A = (p+1)(q+1)(r+1) (\geq 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12)$$

と表される.

よって, n の正の約数の個数が20 ($= 2^2 \cdot 5$) であるとき, $p+1, q+1, r+1$ のいずれかが5の倍数である必要があるが, $q+1 = 5q' (q' = 1, 2, \dots)$ のとき,

$$(p+1)(q+1)(r+1) \geq 3 \cdot 5q' \cdot 2 > 20$$

となり, 不適.

同様にして, $r+1$ も5の倍数になり得ない.

よって, $p+1 = 5p' (p' = 1, 2, \dots)$ とすると,

$$(p+1)(q+1)(r+1) \geq 5p' \cdot 2 \cdot 2 = 20p'$$

ゆえに, n の正の約数の個数が20になるのは, $p' = 1$ の場合のみであり, このとき,

$$n = 2^4 \cdot 11 \cdot 23 = \boxed{4048}_{\text{タ}}$$

〔3〕

(1) $f(x) = x^2 + ax + a + 3$ とする.

x の2次方程式 $f(x) = 0$ の判別式を D とすると,

$$D = a^2 - 4(a+3) = (a+2)(a-6)$$

よって, 放物線 $y = f(x)$ が x 軸と異なる2つの共有点をもつとき, $D > 0$ であるから,

$$\begin{aligned} (a+2)(a-6) &> 0 \\ \boxed{a < -2, 6 < a}_{\text{チ}} \end{aligned}$$

$$\text{また, 放物線 } y = f(x) \quad \text{すなわち} \quad y = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + a + 3 \text{ と } x \text{ 軸の正の部分が異なる}$$

2つの共有点をもつための条件は,

$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ -\frac{a}{2} > 0 \\ D > 0 \end{cases}$$

よって,

$$\begin{cases} a > -3 \\ a < 0 \\ a < -2, 6 < a \end{cases}$$

であるから, a の値の範囲は,

$$\boxed{-3 < a < -2}_{\text{ツ}}$$

(2) $g(x) = (\log_{10} a)x^2 + 2(\log_{10} a - 1)x - (\log_{10} a - 1)$ とする.

$\log_{10} a = A$ とし, x の2次方程式 $g(x) = 0$ の判別式を D' とすると,

$$\frac{D'}{4} = (A-1)^2 + A(A-1) = 2A^2 - 3A + 1 = (2A-1)(A-1)$$

① $a = 100$ のとき, $A = 2$ であるから,

$$\frac{D'}{4} = 3 \cdot 1 > 0$$

したがって, 放物線 $y = g(x)$ は x 軸との共有点を $\boxed{2}_{\text{テ}}$ 個もつ.

② $A < 0$ すなわち $0 < a < 1$ のとき, 放物線 $y = g(x)$ は x 軸の下側にあるか, x 軸と共有点をもつ.

$A > 0$ すなわち $a > 1$ のとき, 放物線 $y = g(x)$ が x 軸の上側にあるための条件は, $D' < 0$ より,

$$\begin{aligned} (2A-1)(A-1) &< 0 \\ \frac{1}{2} &< A < 1 \\ \log_{10} \sqrt{10} &< \log_{10} a < \log_{10} 10 \\ \sqrt{10} &< a < 10 \end{aligned}$$

これは $a > 1$ を満たすから, 求める a の値の範囲は,

$$\boxed{\sqrt{10} < a < 10}_{\text{ト}}$$

$$\text{また, 放物線 } y = g(x) \quad \text{すなわち} \quad y = A \left(x + \frac{A-1}{A}\right)^2 - \frac{(A-1)^2}{A} - (A-1) \text{ と } x \text{ 軸の正の部分が}$$

異なる2つの共有点をもつための条件は,

(i) $A < 0$ すなわち $0 < a < 1$ のとき,

$$\begin{cases} g(0) < 0 \\ -\frac{A-1}{A} > 0 \\ D' > 0 \end{cases}$$

より,

$$\begin{cases} a > 10 \\ A > 1 \quad \text{すなわち} \quad a > 10 \\ a < \sqrt{10}, 10 < a \end{cases}$$

これらと $0 < a < 1$ を同時に満たす a の値は存在しない.

(ii) $A > 0$ すなわち $a > 1$ のとき,

$$\begin{cases} g(0) > 0 \\ -\frac{A-1}{A} > 0 \\ D' > 0 \end{cases}$$

より,

$$\begin{cases} a < 10 \\ A < 1 \quad \text{すなわち} \quad a < 10 \\ a < \sqrt{10}, 10 < a \end{cases}$$

これと $a > 1$ より,

$$1 < a < \sqrt{10}$$

以上から, a の値の範囲は,

$$\boxed{1 < a < \sqrt{10}}_{\text{ナ}}$$

Ⅱ

〔1〕農園の果物全体の10%がBグレードであることから、残りの90%がAグレードである。
また、検査結果Xの判定は次のようにまとめられる。

	Aグレードの果物	Bグレードの果物
Aと判定	88%	8%
Bと判定	12%	92%

よって、農園から出荷される果物から1個取り出してXで検査するとき、Bグレードと判定されるのは、

- ・果物がAグレードであり、Bグレードと判定される場合
- ・果物がBグレードであり、Bグレードと判定される場合

があるから、その結果は、

$$\frac{90}{100} \cdot \frac{12}{100} + \frac{10}{100} \cdot \frac{92}{100} = \frac{1080}{10000} + \frac{920}{10000} = \frac{2000}{10000} = 0.2$$

より、

$$\boxed{20}_{\text{ア}}\% \qquad \dots\dots \text{①}$$

また、XでBグレードと判定されたときに、実際はAグレードである確率は、

$$\frac{\frac{1080}{10000}}{\frac{2000}{10000}} = \frac{540}{1000} = 0.54$$

より、

$$\boxed{54}_{\text{イ}}\%$$

〔2〕Xの検査においてBグレードと判定されたもののうち、実際にはAグレードである果物と実際にBグレードである果物の比は、

$$\frac{1080}{10000} : \frac{920}{10000} = 27 : 23$$

さらに、人による判定は次のようにまとめられる。

	Aグレードの果物	Bグレードの果物
Aと判定	98%	2%
Bと判定	2%	98%

以上から、農園から出荷される果物のうち、Xの検査でBグレードと分類されたものについて、この中から取り出した1個が、人による検査でBグレードと分類されるのは、

- ・Aグレードの果物がXでBグレードと判定されたのち、人によりBグレードと判定される場合
- ・Bグレードの果物がXでBグレードと判定されたのち、人によりBグレードと判定される場合

があるから、その確率は、

$$\frac{27}{50} \cdot \frac{2}{100} + \frac{23}{50} \cdot \frac{98}{100} = \frac{2308}{5000} = 0.4616$$

より、

$$\boxed{46.2}_{\text{ウ}}\%$$

また、農園から出荷される果物から取り出した1個が、Xの検査と人による検査の結果、Bグレードと判定されるのは、

- ・Aグレードの果物がXでBグレードと判定されたのち、人によりBグレードと判定される場合
- ・Bグレードの果物がXでBグレードと判定されたのち、人によりBグレードと判定される場合

があるから、その確率は、

$$\begin{aligned} & \frac{90}{100} \cdot \frac{12}{100} \cdot \frac{2}{100} + \frac{10}{100} \cdot \frac{92}{100} \cdot \frac{98}{100} \\ &= \frac{2160}{1000000} + \frac{90160}{1000000} \\ &= \frac{92320}{1000000} = 0.09232 \qquad \dots\dots \text{②} \end{aligned}$$

より、

$$\boxed{9.2}_{\text{エ}}\%$$

次に、人による検査が必要なのは、XでBグレードと判定されたものであるから、①より、1日当たりの人による検査が必要なのは、

$$1000 \cdot \frac{20}{100} = \boxed{200}_{\text{オ}} \text{ (個)}$$

したがって、1000個全部に対してXの検査が、その後200個に対して人の検査が必要であるから、1日に必要な検査の総費用は、

$$1000 \cdot 2 + 200 \cdot 10 = \boxed{4000}_{\text{カ}} \text{ (円)}$$

また、農園から出荷される果物の中から取り出した1個が、Aグレードであり、かつXの検査と人による検査の結果、Bグレードと判定される確率は、②から、

$$\frac{2160}{1000000} = 0.00216$$

より、

$$\boxed{0.2}_{\text{キ}}\%$$

これと、1個当たりの損失額は

$$100 - 30 = 70 \text{ (円)}$$

であることから、1日の損失額は、

$$1000 \times \frac{0.2}{100} \times 70 = \boxed{140}_{\text{ク}} \text{ (円)}$$

〔3〕検査装置Yの判定は次のようにまとめられる。

	Aグレードの果物	Bグレードの果物
Aと判定	94%	4%
Bと判定	6%	96%

この農園から出荷される果物から取り出した1個がBグレードであり、かつAグレードとして出荷されるのは、

- ・XでAグレードと判定される場合
- ・XでBグレードと判定されたのち、YでAグレードと判定される場合

があるから、その確率は、

$$\frac{10}{100} \left(\frac{8}{100} + \frac{92}{100} \cdot \frac{4}{100} \right) = \frac{11680}{1000000} = 0.011680$$

より、

$$\boxed{1.2}_{\text{ケ}}\%$$

また、人の代わりにYを導入した場合、果物1個当たりの削減できる費用は、

$$10 - 5 = 5 \text{ (円)}$$

したがって、1日の出荷個数1000個当たりの総検査費用は、人の検査に比べて、

$$200 \cdot 5 = \boxed{1000}_{\text{コ}} \text{ (円)}$$

低下する。

Ⅲ

〔1〕

(1) $f(x)$ は 3 次関数であるから, $a \neq 0$

$$f(1)=2 \text{ より,}$$

$$a+b+c+d=2$$

$$f(-1)=-2 \text{ より,}$$

$$-a+b-c+d=-2$$

$$\int_{-1}^1 (bx^2+cx+d)dx=2 \text{ より,}$$

$$2 \int_0^1 (bx^2+d)dx=2$$

$$\left[\frac{b}{3}x^3+dx \right]_0^1=1$$

$$\frac{b}{3}+d=1$$

以上から,

$$b=-\frac{3}{2}, c=2-a, d=\frac{3}{2}$$

であるから,

$$f(x)=ax^3-\frac{3}{2}x^2+(2-a)x+\frac{3}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2)

$$\begin{aligned} f(x)-2x &= \left\{ ax^3-\frac{3}{2}x^2+(2-a)x+\frac{3}{2} \right\} - 2x \\ &= ax^3-\frac{3}{2}x^2-ax+\frac{3}{2} \\ &= \left(ax-\frac{3}{2} \right) (x+1)(x-1) \\ &= a \left(x-\frac{3}{2a} \right) (x+1)(x-1) \end{aligned}$$

よって, $y=f(x)$ と直線 $y=2x$ が接するための条件は, $f(x)-2x=0$ が重解をもつことであるから,

$$a=-\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$a=-\frac{3}{2} \text{ のとき,}$$

$$f(x)-2x=-\frac{3}{2}(x+1)^2(x-1)$$

$$\text{であり, } a=\frac{3}{2} \text{ のとき,}$$

$$f(x)-2x=\frac{3}{2}(x+1)(x-1)^2$$

よって, $-1 < x < 1$ において, a の値に関わらず

$$f(x)-2x > 0 \quad \text{すなわち} \quad f(x) > 2x$$

であるから, 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=2x$ で囲まれた部分の面積は,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left\{ (ax^3+bx^2+cx+d)-2x \right\} dx &= \int_{-1}^1 (ax^3-2x) dx + \int_{-1}^1 (bx^2+cx+d) dx \\ &= 0+2 \\ &= 2 \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

〔2〕

(1)

$$\begin{aligned} g(x) &= -x^3+x^2+6x+\int_0^1 (x^2t+3)dt \\ &= -x^3+x^2+6x+\left[\frac{x^2}{2}t^2+3t \right]_0^1 \\ &= -x^3+x^2+6x+\frac{x^2}{2}+3 \\ &= -x^3+\frac{3}{2}x^2+6x+3 \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

よって,

$$g'(x)=-3x^2+3x+6=-3(x+1)(x-2)$$

より, $g(x)$ の増減は次のようになる.

x	...	-1	...	2	...
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	13	$\searrow$

したがって, $g(x)$ の

$$\text{極大値は } 13, \text{ 極小値は } -\frac{1}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) $y=g(x)$ のグラフを x 軸方向に p , y 軸方向に q 平行移動したグラフは,

$$y=g(x-p)+q$$

であり, $g(x-p)+q=h(x)$ とおく.

$y=h(x)$ のグラフが原点に関して対称になるためには, $h(x)$ が奇関数となればよい.

$$\begin{aligned} h(x) &= g(x-p)+q \\ &= -(x-p)^3+\frac{3}{2}(x-p)^2+6(x-p)+3+q \\ &= -x^3+\left(3p+\frac{3}{2} \right)x^2-(3p^2+3p-6)x+p^3+\frac{3}{2}p^2-6p+q+3 \end{aligned}$$

より, $h(x)$ が奇関数となるための条件は,

$$3p+\frac{3}{2}=0, p^3+\frac{3}{2}p^2-6p+q+3=0$$

これより, 求める p, q の値は,

$$p=-\frac{1}{2}, q=-\frac{25}{4} \quad \dots\dots(\text{答})$$