

I

【解答】

ア	$x^2+2x-a+2$	イ	$-a-b+2$	ウ	$-a-b+2=0$	エ	$(1,1)$		
オ	$a=1,5$	カ	0	キ	4	ク	$0<a<4$	ケ	$\frac{4}{9}$

【解説】

$$x^3+x^2-ax-b=(x-1)(x^2+2x-a+2)-a-b+2$$

であるため、 $f(x)$ を $x-1$ で割った商は $x^2+2x-a+2$ 、余りは $-a-b+2$ である。 $f(x)$ が $x-1$ で割り切れるとき、余りは 0 となるため、 $f(x)$ が $x-1$ で割り切れるための a, b が満たす必要十分条件は

$$-a-b+2=0$$

である。また、

$$x^3+x^2-ax-b=(x^2-1)(x+1)+(1-a)x+1-b$$

であるため、 $f(x)$ を x^2-1 で割った余りは $(1-a)x+1-b$ である。 $f(x)$ が x^2-1 で割り切れるとき、余りは 0 となるため、

$$\begin{cases} 1-a=0 \\ 1-b=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

となる。したがって、 $f(x)$ が x^2-1 で割り切れるとき、 $(a, b)=(1, 1)$ となる。また、 $-a-b+2=0$ のもとで、

$$f(x)=(x-1)(x^2+2x-a+2)$$

であるため、方程式 $f(x)=0$ が重解をもつための条件は、

$$「x^2+2x-a+2=0 \text{ が重解をもつ}」 \text{ または } 「x^2+2x-a+2=0 \text{ が } x=1 \text{ を解にもつ}」$$

である。 $x^2+2x-a+2=0$ が重解をもつのは、 $x^2+2x-a+2=0$ の判別式を D_1 とおくと、 $D_1=0$ のときである。

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{4} &= 1-(-a+2) \\ &= a-1 \end{aligned}$$

であるため、

$$D_1=0 \Leftrightarrow a=1$$

となる。また、 $x^2+2x-a+2=0$ が $x=1$ を解にもつとき、

$$\begin{aligned} 5-a &= 0 \\ \therefore a &= 5 \end{aligned}$$

となる。したがって、方程式 $f(x)=0$ が重解をもつための条件は $a=1, 5$ である。次に、 $-a-b+2=0$ のもとでは、 C と L の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} (x-1)(x^2+2x-a+2) &= x-1 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x-a+1) &= 0 \end{aligned}$$

の実数解となる。したがって、 C と L が異なる 3 点で交わるための条件は、 $x^2+2x-a+1=0$ が $x=1$ 以外の異なる 2 実数解をもつための条件と等しい。 $g(x)=x^2+2x-a+1$ とおき、 $x^2+2x-a+1=0$ の判別式を D_2 とおくと、 $y=g(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから、求める条件は

$$「g(1)<0」 \text{ または } 「g(1)>0 \text{ かつ } D_2>0」$$

である。 $g(1)=4-a$ より、

$$\begin{aligned} g(1) &< 0 \\ \Leftrightarrow a &> 4 \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \frac{D_2}{4} &= 1-(-a+1) \\ &= a \end{aligned}$$

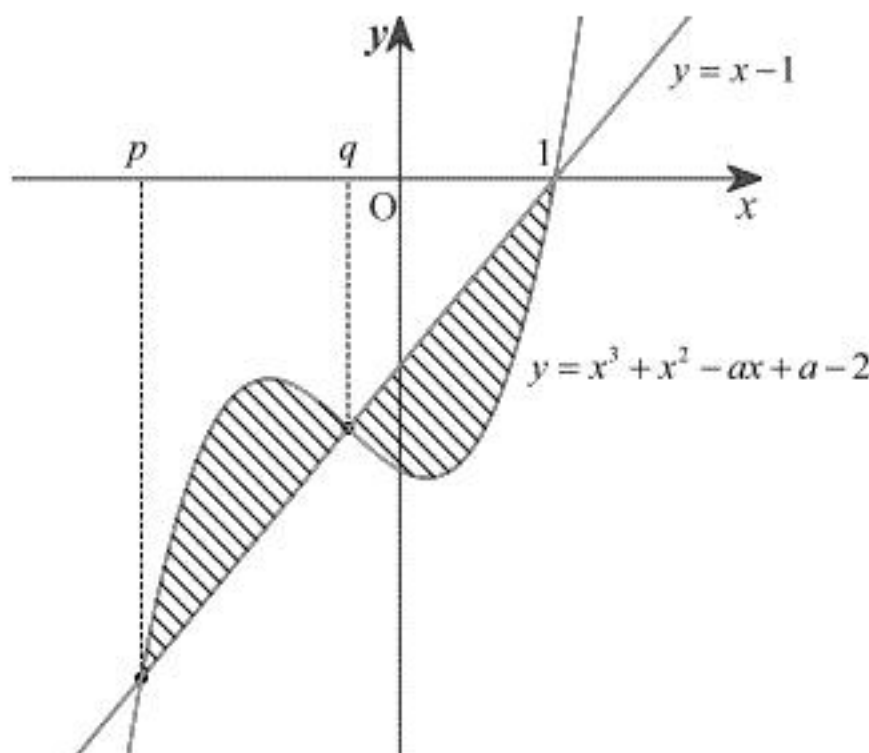
より、

$$\begin{cases} g(1)>0 \\ D_2>0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow 0<a<4$$

である。したがって、 C と L が異なる 3 点で交わるための条件は、 $a>0$ かつ $a \neq 4$ である。このとき、共有点の x 座標は $x=1$ と $x^2+2x-a+1=0$ の 2 実数解である。したがって、 $q<1$ であるための必要十分条件は、 $x^2+2x-a+1=0$ が $x<1$ を満たす 2 実数解をもつことである。 $x^2+2x-a+1=0$ が $x<1$ を満たす 2 実数解をもつのは、軸 $x=-1<1$ が成り立つことから、

$$\begin{cases} g(1)>0 \\ D_2>0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow 0<a<4$$

のときである。したがって、求める条件は $0<a<4$ である。この条件下で、 C と L を図示すると以下ようになる。



したがって、 $p \leq x \leq q$ の範囲で C と L に囲まれる部分の面積と $q \leq x \leq r=1$ の範囲で C と L に囲まれる部分の面積が等しいのは、

$$\begin{aligned} \int_p^q \{f(x)-(x-1)\} dx &= \int_q^1 \{(x-1)-f(x)\} dx \\ \Leftrightarrow \int_p^q \{f(x)-(x-1)\} dx + \int_q^1 \{f(x)-(x-1)\} dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_p^1 \{f(x)-(x-1)\} dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_p^1 (x-1)(x-p)(x-q) dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_p^1 (x-p)(x-p+p-1)(x-p+p-q) dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_p^1 \{(x-p)^3 + (x-p)^2(2p-q-1) + (x-p)(p-1)(p-q)\} dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \left[\frac{1}{4}(x-p)^4 + \frac{1}{3}(x-p)^3(2p-q-1) + \frac{1}{2}(x-p)^2(p-1)(p-q) \right]_p^1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}(1-p)^4 + \frac{1}{3}(1-p)^3(2p-q-1) + \frac{1}{2}(1-p)^2(p-1)(p-q) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3(1-p) + 4(2p-q-1) - 6(p-q) &= 0 (\because 1-p \neq 0) \\ \Leftrightarrow -p + 2q - 1 &= 0 \end{aligned}$$

のときである。また、 $x^2+2x-a+1=0$ について、解と係数の関係式より、

$$p+q=-2$$

が成り立つ。したがって、この 2 式を連立して

$$p=-\frac{5}{3}, q=-\frac{1}{3}$$

を得る。ゆえに、 $pq=\frac{5}{9}$ である。また、解と係数の関係式より、 $pq=-a+1$ であるため、

$$a=\frac{4}{9}$$

を得る。

Ⅱ

【解答】

ア	0	イ	$\alpha-\beta+1$	ウ	1	エ	0	オ	1
カ	$0, \pm 2$	キ	± 8	ク	$\frac{ c-1 }{2}$	ケ	$\frac{1}{\sqrt{5}}$		

【解説】

- [1] $\alpha+\beta=|c-1|$ より、これは実数であるから、 $\alpha+\beta$ の虚部は0である。また、 $\alpha-\beta=c-1$ より、 c を α, β を用いて表すと、 $c=\alpha-\beta+1$ である。特に、 $\alpha=\beta$ が成り立つとき、 $c=1$ である。
- [2] c が実数である
 $\Leftrightarrow c-1$ が実数である
 $\Leftrightarrow c-1=\overline{c-1}$ である
が成り立つ。ここで、 $\alpha\beta$ について、
$$\alpha\beta=\frac{|c-1|^2-(c-1)^2}{4}=\frac{(c-1)\{\overline{(c-1)}-(c-1)\}}{4}$$
より、 c が実数ならば $\alpha\beta=0$ であり、逆に $\alpha\beta=0$ ならば $c-1=\overline{c-1}$ または $c=1$ であるから c は実数となる。よって、 c が実数であることの必要十分条件は $\alpha\beta=0$ である。特に、 $\beta=0$ のとき、
$$\frac{|c-1|-(c-1)}{2}=0$$
$$\Leftrightarrow c=|c-1|+1$$
であり、 $|c-1|\geq 0$ であるから $c\geq 1$ となる。逆に $c\geq 1$ のとき、 $|c-1|=c-1$ であるから $\beta=0$ を満たす。よって、 $\beta=0$ であることは $c\geq 1$ であることと同値である。
- [3] $c=1+si$ (ただし、 s は実数) とおくと、 $\alpha=\frac{|s|+si}{2}, \beta=\frac{|s|-si}{2}$ と表せる。以下、 $\alpha=\beta$ と $\alpha\neq\beta$ で場合分けをして考える。
- [1] $\alpha=\beta$ のとき、つまり $s=0$ のとき
 $\alpha=\beta=0, c=1$ となり、3点 A, B, C は同一直線上にある。
- [2] $\alpha\neq\beta$ のとき、つまり $s\neq 0$ のとき
3点 A, B, C が同一直線上にあるとき、 $\frac{c-\alpha}{\beta-\alpha}$ は実数となる。
$$\frac{c-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(2-|s|)+si}{-2si}=-\frac{1}{2}+\frac{2-|s|}{2s}i$$
より、これが実数となるのは、虚部 $\frac{2-|s|}{2s}$ が0になるときであり、 $s=\pm 2$ である。
- 以上、[1], [2] より、3点 A, B, C が同一直線上にあるのは、 c の虚部 s が $0, \pm 2$ のときである。
- また、このとき以外について $\triangle ABC$ の面積 S を考える。 $\operatorname{Re}(\alpha)=\operatorname{Re}(\beta)=\frac{|s|}{2}$ より2点 A, B は複素平面上で虚軸に平行な直線上に存在するため、辺 AB を底辺と見ると底辺の長さは $|\operatorname{Im}(\alpha)-\operatorname{Im}(\beta)|=|s|$ である。このとき、 $\triangle ABC$ の高さは、点 C と直線 $\operatorname{Re}(z)=\frac{|s|}{2}$ の距離 $\left|1-\frac{|s|}{2}\right|$ であるから、 $S=\frac{1}{2}|s|\left|-\frac{|s|}{2}+1\right|$ と表せる。以下、 $S=12$ となるような s の値を s の値で場合分けをして考える。
- [1] $s\geq 0$ のとき
$$S=\frac{s}{2}\left|-\frac{s}{2}+1\right|$$
より、
$$S=12$$
$$\Leftrightarrow \frac{s}{2}\left|-\frac{s}{2}+1\right|=12$$
$$\Leftrightarrow s|s-2|=48$$
$$\Leftrightarrow -s^2+2s=\pm 48$$
$$\therefore s=1\pm\sqrt{47}i, 8, -6$$
となり、このうち $s\geq 0$ を満たすのは $s=8$ である。
- [2] $s<0$ のとき
$$S=-\frac{s}{2}\left|\frac{s}{2}+1\right|$$
より、
$$S=12$$
$$\Leftrightarrow -\frac{s}{2}\left|\frac{s}{2}+1\right|=12$$
$$\Leftrightarrow -s|s+2|=48$$
$$\Leftrightarrow s^2+2s=\pm 48$$
$$\therefore s=-1\pm\sqrt{47}i, 6, -8$$
となり、このうち $s<0$ を満たすのは $s=-8$ である。
- 以上、[1], [2] より、 $\triangle ABC$ の面積が12となるのは、 c の虚部 s が ± 8 のときである。
- [4] 線分 AB の中点を表す複素数は $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{|c-1|}{2}$ である。この中点を M とし、M を表す複素数を m とする。このとき、 $\triangle ABC$ が $AC=BC$ を満たす直角二等辺三角形になるとき、 $\triangle AMC$ は $AM=CM$ であり $\angle AMC$ は直角であるから、
$$\frac{c-m}{\alpha-m}=\pm i$$
$$\Leftrightarrow \frac{c-\frac{|c-1|}{2}}{\frac{c-1}{2}}=\pm i$$
$$\Leftrightarrow 2c-|c-1|=\pm i(c-1)$$
となる。ここで、 $c=x+yi$ (ただし、 x, y はともに実数) とおき、上式に代入すると、
$$2(x+yi)-\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\pm i(x-1+yi)$$
を得る。以下、右辺の符号で場合分けをして考える。
- [1] $2(x+yi)-\sqrt{(x-1)^2+y^2}=i(x-1+yi)$ について
これを整理すると $2x-\sqrt{(x-1)^2+y^2}-2yi=-y+(x-1)i$ であり、 x, y は実数であるから複素数の相等より
$$\begin{cases} 2x-\sqrt{(x-1)^2+y^2}=-y & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2y=x-1 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$
が成り立つ。 $\textcircled{2}$ を変形した $x=2y+1$ を $\textcircled{1}$ に代入して
$$2(2y+1)-\sqrt{(2y)^2+y^2}=-y$$
$$\Leftrightarrow 5y+2=\sqrt{5}|y|$$
を得る。ここで、さらに y の値で場合分けをして考える。
- [i] $y\geq 0$ のとき
$$5y+2=\sqrt{5}y \Leftrightarrow y=-\frac{5+\sqrt{5}}{10}$$
となるが、これは $y\geq 0$ を満たさず不適である。
- [ii] $y<0$ のとき
$$5y+2=-\sqrt{5}y \Leftrightarrow y=-\frac{5-\sqrt{5}}{10}$$
となり、これは $y<0$ を満たす。このとき、 $x=2y+1$ より、 $x=\frac{\sqrt{5}}{5}$ となる。
- 以上、[i], [ii] より、等式を満たす x, y の値は $x=\frac{\sqrt{5}}{5}, y=-\frac{5-\sqrt{5}}{10}$ である。
- [2] $2(x+yi)-\sqrt{(x-1)^2+y^2}=-i(x-1+yi)$ について
これを整理すると $2x-\sqrt{(x-1)^2+y^2}+2yi=y-(x-1)i$ であり、複素数の相等より
$$\begin{cases} 2x-\sqrt{(x-1)^2+y^2}=y & \cdots \cdots \textcircled{3} \\ 2y=-(x-1) & \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$
が成り立つ。 $\textcircled{4}$ を変形した $x=-2y+1$ を $\textcircled{3}$ に代入して
$$5y-2=-\sqrt{5}|y|$$
を得る。[1] と同様にして解くと、 $x=\frac{\sqrt{5}}{5}, y=\frac{5-\sqrt{5}}{10}$ となる。
- 以上、[1], [2] より、 $\triangle ABC$ が $AC=BC$ を満たす直角二等辺三角形になるとき、 c の実部 x は $\frac{1}{\sqrt{5}}$ となる。

Ⅲ

〔解答〕

ア	-1	イ	$\sqrt{2}$	ウ	1	エ	1
オ	$3x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x + 1$	カ	$12x^3 + 4x^2 - 3x - 1$	キ, ク	$-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ (順不同)	ケ	$10 + \frac{5\sqrt{2}}{3}$

〔解説〕

$$\begin{aligned}x &= \sin \theta + \cos \theta \\&= \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)\end{aligned}$$

より、 θ が $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲を動くとき、 x は $-1 \leq x \leq \sqrt{2}$ の範囲を動く。また、 $x^2 = p + q \sin 2\theta$ とすると、

$$\begin{aligned}x^2 &= (\sin \theta + \cos \theta)^2 \\&= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta \\&= 1 + \sin 2\theta\end{aligned}$$

であるため、 $p=1, q=1$ である。よって、 $x^2 = 1 + \sin 2\theta \Leftrightarrow \sin 2\theta = x^2 - 1$ より、

$$\begin{aligned}f(\theta) &= -3(1 - \sin^2 2\theta) + \frac{9}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{3}(\sin \theta + \cos \theta)(4 \sin 2\theta + 1) + \frac{11}{2} \\&= -3\{1 - (x^2 - 1)^2\} + \frac{9}{2}(x^2 - 1) + \frac{1}{3}x\{4(x^2 - 1) + 1\} + \frac{11}{2} \\&= -3(2x^2 - x^4) + \frac{9}{2}(x^2 - 1) + \frac{1}{3}x(4x^2 - 3) + \frac{11}{2} \\&= 3x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x + 1\end{aligned}$$

となる。そこで、

$$g(x) = 3x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x + 1$$

と定めると、

$$\begin{aligned}g'(x) &= 12x^3 + 4x^2 - 3x - 1 \\&= (2x+1)(6x^2 - x - 1) \\&= (2x+1)(3x+1)(2x-1)\end{aligned}$$

となるから、 $g'(x)=0$ となる x は $x=-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ である。したがって、 $-1 \leq x \leq \sqrt{2}$ における

$g(x)$ の増減は次表のようになる。

x	-1	...	$-\frac{1}{2}$	...	$-\frac{1}{3}$	...	$\frac{1}{2}$	...	$\sqrt{2}$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$	$\frac{13}{6}$				$\frac{187}{162}$				$10 + \frac{5\sqrt{2}}{3}$

ここで、

$$\begin{aligned}g(-1) &= \frac{13}{6} < 3 \\g\left(-\frac{1}{3}\right) &= \frac{187}{162} < 2 \\g(\sqrt{2}) &= 10 + \frac{5\sqrt{2}}{3} > 10\end{aligned}$$

となるから、増減表より、 x が $-1 \leq x \leq \sqrt{2}$ の範囲を動くとき $g(x)$ の最大値は $g(\sqrt{2}) = 10 + \frac{5\sqrt{2}}{3}$

である。これより、 θ が $0 \leq \theta \leq \pi$ を動くとき $f(\theta)$ の最大値は $10 + \frac{5\sqrt{2}}{3}$ である。

IV

〔解答〕

ア	1	イ	$2x$	ウ	1	エ	2		
オ	1	カ	$3x$	キ	3	ク	1	ケ	4
コ	2^n	サ	1	シ	$x^{k+1}+x$	ス	1	セ	$2^{\frac{n}{n+1}}$

〔解説〕

〔1〕

$$\begin{aligned}\frac{(1+x)^2}{1+x^2} &= \frac{x^2+1+2x}{x^2+1} \\ &= 1 + \frac{2x}{x^2+1}\end{aligned}$$

である。

$$x^2+1-2x=(x-1)^2 \geq 0$$

より、任意の x に対して $2x \leq x^2+1$ が成立し、等号は $x=1$ のとき成立する。 $x^2+1 > 0$ であるため、

$$\frac{2x}{x^2+1} \leq 1$$

が成立する。よって、 $\frac{(1+x)^2}{1+x^2}$ は $x=1$ において最大値 2 をとることがわかる。 $n=2$ のとき、

$$\begin{aligned}\frac{(1+x)^3}{1+x^3} &= \frac{(1+x)^3}{(1+x)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{x^2-x+1+3x}{x^2-x+1} \\ &= 1 + \frac{3x}{x^2-x+1}\end{aligned}$$

である。

$$3(x^2-x+1)-3x=3(x-1)^2 \geq 0$$

より、任意の x に対して $3x \leq 3(x^2-x+1)$ が成立し、等号は $x=1$ のとき成立する。

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0 \text{ であるため、}$$

$$\frac{3x}{x^2-x+1} \leq 3$$

が成立する。よって、 $\frac{(1+x)^3}{1+x^3}$ は $x=1$ において最大値 4 をとることがわかる。次に、 n を自

然数、 $x \geq 0$ とするとき、 $\frac{(1+x)^{n+1}}{1+x^{n+1}}$ は $x=1$ において最大値 2^n をとることを数学的帰納法によ

って示す。 $n=1$ のときに成り立つことは既に示した。 $n=k$ のとき、 $\frac{(1+x)^{k+1}}{1+x^{k+1}}$ は $x=1$ において最大値 2^k をとると仮定する。このとき

$$\begin{aligned}\frac{(1+x)^{k+2}}{1+x^{k+2}} &= \frac{(1+x)^{k+1}}{1+x^{k+1}} \cdot \frac{(1+x^{k+1})(1+x)}{1+x^{k+2}} \\ &= \frac{(1+x)^{k+1}}{1+x^{k+1}} \left(\frac{x^{k+2}+1+x^{k+1}+x}{x^{k+2}+1} \right) \\ &= \frac{(1+x)^{k+1}}{1+x^{k+1}} \left(1 + \frac{x^{k+1}+x}{x^{k+2}+1} \right)\end{aligned}$$

である。 $\frac{x^{k+1}+x}{x^{k+2}+1}$ について、

$$\begin{aligned}x^{k+2}+1-(x^{k+1}+x) &= (x-1)(x^k-1) \\ &= (x-1)^2(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x+1)\end{aligned}$$

であり、 $x \geq 0$ のとき $x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x+1 > 0$ が成り立つため、

$$\begin{aligned}x^{k+2}+1-(x^{k+1}+x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x^{k+1}+x &\leq x^{k+2}+1 \\ \therefore \frac{x^{k+1}+x}{x^{k+2}+1} &\leq 1\end{aligned}$$

が成り立つ。等号成立は $x=1$ のときである。これと帰納法の仮定より、

$$\frac{(1+x)^{k+2}}{1+x^{k+2}} \leq 2^k(1+1)=2^{k+1}$$

が $n=k+1$ で成り立つことがわかる。 $x=1$ を代入すると、等号が成り立つことが確認できる。

〔2〕

$y=x^{\frac{1}{n+1}}$ とすると $x=y^{n+1}$ であるから、

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{n+1}}}{1+x^{\frac{1}{n+1}}} = \frac{(1+y^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}}{1+y} = \left\{ \frac{(1+y)^{n+1}}{1+y^{n+1}} \right\}^{\frac{1}{n+1}}$$

となる。 n が自然数で $x \geq 0$ のとき $y \geq 0$ であるから、〔1〕より $\frac{(1+y)^{n+1}}{1+y^{n+1}}$ は $y=1$ において最

大値 2^n をとる。したがって $\frac{(1+x)^{\frac{1}{n+1}}}{1+x^{\frac{1}{n+1}}}$ は、 $y=1$ 、すなわち $x=1$ のときに最小値 $2^{\frac{n}{n+1}}$ をとる。