

【解答】

〔1〕	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
	5	-1	1	4	5	10
〔2〕	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	4	-2	-5	-2	1	5
〔3〕	ス	セ				
	-2	9				

【解説】

〔1〕

$A \cap B = \{1, 5\}$ のとき、 B の集合に5が含まれるため、 $a^2 - 10a + 29 = 5$ または、 $2a^2 - 8a - 5 = 5$ である。

[1] $a^2 - 10a + 29 = 5$ のとき

$$\begin{aligned} a^2 - 10a + 29 &= 5 \\ \Leftrightarrow a^2 - 10a + 24 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a - 4)(a - 6) &= 0 \\ \therefore a &= 4, 6 \end{aligned}$$

となる。 $a = 4$ のとき、

$$A = \{-3, 1, -2, 20, -14\}$$

となり、 A の集合に5が含まれないため、不適である。 $a = 6$ のとき、

$$A = \{-3, 1, 0, -2, 44\}$$

となり、 A の集合に5が含まれないため、不適である。

[2] $2a^2 - 8a - 5 = 5$ のとき

$$\begin{aligned} 2a^2 - 8a - 5 &= 5 \\ \Leftrightarrow 2a^2 - 8a - 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 4a - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a + 1)(a - 5) &= 0 \\ \therefore a &= -1, 5 \end{aligned}$$

となる。 $a = -1$ のとき、

$$A = \{-3, 1, -7, 40, -19\}$$

となり、 A の集合に5が含まれないため、不適である。 $a = 5$ のとき、

$$A = \{-3, 1, -1, 10, 5\}$$

となり、 A の集合に5が含まれるため、適する。また、このとき

$$B = \{-2, 1, 4, 5\}$$

であり、 $A \cap B = \{1, 5\}$ となる。

以上、[1], [2]より、 $A \cap B = \{1, 5\}$ のとき、 $a = 5$ である。このとき、

$$A \cup B = \{-3, -2, -1, 1, 4, 5, 10\}$$

である。

〔2〕

$B \cap C = \{1, k\}$ となるとき、 C の集合に1が含まれるため、 $-3a^2 + 7a + 18 = 1$ または $-a^2 + 3a + 5 = 1$ である。

[1] $-3a^2 + 7a + 18 = 1$ のとき

$$\begin{aligned} -3a^2 + 7a + 18 &= 1 \\ \Leftrightarrow 3a^2 - 7a - 17 &= 0 \\ \therefore a &= \frac{7 \pm \sqrt{253}}{6} \end{aligned}$$

となるため、 $-3a^2 + 7a + 18 = 1$ を満たす整数解 a は存在せず、不適である。

[2] $-a^2 + 3a + 5 = 1$ のとき

$$\begin{aligned} -a^2 + 3a + 5 &= 1 \\ \Leftrightarrow a^2 - 3a - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a + 1)(a - 4) &= 0 \\ \therefore a &= -1, 4 \end{aligned}$$

となる。 $a = -1$ のとき、

$$B = \{-2, 1, 40, 5\}$$

$$C = \{8, 1\}$$

であり、 $B \cap C = \{1\}$ となるため、不適である。 $a = 4$ のとき、

$$B = \{-2, 1, 5, -5\}$$

$$C = \{-2, 1\}$$

であり、 $B \cap C = \{-2, 1\}$ となるため、適する。

以上、[1], [2]より、 $B \cap C = \{1, k\}$ のとき、 $a = 4, k = -2$ である。このとき、

$$B \cup C = \{-5, -2, 1, 5\}$$

である。

〔3〕

$A \cap C$ の要素の個数が1で、かつ $B \cap C = \phi$ のとき、 A の要素と C の要素の1つが共通し、その要素は1以外となる。このとき、 $A \cap C$ の要素の値で場合分けする。

[1] $-3a^2 + 7a + 18 = -3$ のとき

$$\begin{aligned} -3a^2 + 7a + 18 &= -3 \\ \Leftrightarrow 3a^2 - 7a - 21 &= 0 \\ \therefore a &= \frac{7 \pm \sqrt{301}}{6} \end{aligned}$$

となる。よって、 $-3a^2 + 7a + 18 = -3$ は整数解をもたないため不適である。

[2] $-3a^2 + 7a + 18 = a - 6$ のとき

$$\begin{aligned} -3a^2 + 7a + 18 &= a - 6 \\ \Leftrightarrow 3a^2 - 6a - 24 &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 2a - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a + 2)(a - 4) &= 0 \\ \therefore a &= -2, 4 \end{aligned}$$

となる。 $a = 4$ のとき、[2] の結果より $B \cap C = \{1, -2\}$ となるため不適である。 $a = -2$ のとき、

$$A = \{-3, 1, -8, 38, -44\}$$

$$B = \{-2, 1, 53, 19\}$$

$$C = \{-8, -5\}$$

となり、これは $A \cap C$ の要素の個数が1で、かつ $B \cap C = \phi$ を満たす。

[3] $-3a^2 + 7a + 18 = -a^2 - a + 40$ のとき

$$\begin{aligned} -3a^2 + 7a + 18 &= -a^2 - a + 40 \\ \Leftrightarrow 2a^2 - 8a + 22 &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 4a + 11 &= 0 \\ \therefore a &= 2 \pm \sqrt{7}i \end{aligned}$$

となる。よって、 $-3a^2 + 7a + 18 = -a^2 - a + 40$ は整数解をもたないため不適である。

[4] $-3a^2 + 7a + 18 = a^3 - 5a^2 + 3a - 10$ のとき

$$\begin{aligned} -3a^2 + 7a + 18 &= a^3 - 5a^2 + 3a - 10 \\ \Leftrightarrow a^3 - 2a^2 - 4a - 28 &= 0 \end{aligned}$$

$f(a) = a^3 - 2a^2 - 4a - 28$ とおくと、 $f'(a) = 3a^2 - 4a - 4$ となる。

$$\begin{aligned} f'(a) &= 0 \\ \Leftrightarrow (3a + 2)(a - 2) &= 0 \\ \therefore a &= -\frac{2}{3}, 2 \end{aligned}$$

より、 $f'(a) = 0$ となるのは $\therefore a = -\frac{2}{3}, 2$ のときである。よって、増減表は以下のようになる。

a	...	$-\frac{2}{3}$	...	2	...
$f'(a)$	+	0	-	0	+
$f(a)$	$\nearrow$	$-\frac{716}{27}$	$\searrow$	-36	$\nearrow$

上表より、 $f(a) = 0$ の実数解は1つのみであり、

$$f(4) = -12, f(5) = 27$$

であることから、 $f(a) = 0$ を満たす整数解 a は存在しない。よって、不適である。

[5] $-a^2 + 3a + 5 = -3$ のとき

$$\begin{aligned} -a^2 + 3a + 5 &= -3 \\ \Leftrightarrow a^2 - 3a - 8 &= 0 \\ \therefore a &= \frac{3 \pm \sqrt{41}}{2} \end{aligned}$$

となる。よって、 $-a^2 + 3a + 5 = -3$ は整数解をもたないため不適である。

[6] $-a^2 + 3a + 5 = a - 6$ のとき

$$\begin{aligned} -a^2 + 3a + 5 &= a - 6 \\ \Leftrightarrow a^2 - 2a - 11 &= 0 \\ \therefore a &= 1 \pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。よって、 $-a^2 + 3a + 5 = a - 6$ は整数解をもたないため不適である。

[7] $-a^2 + 3a + 5 = -a^2 - a + 40$ のとき

$$\begin{aligned} -a^2 + 3a + 5 &= -a^2 - a + 40 \\ \Leftrightarrow 4a - 35 &= 0 \\ \therefore a &= \frac{35}{4} \end{aligned}$$

となる。よって、 $-a^2 + 3a + 5 = -a^2 - a + 40$ は整数解をもたないため不適である。

[8] $-a^2 + 3a + 5 = a^3 - 5a^2 + 3a - 10$ のとき

$$\begin{aligned} -a^2 + 3a + 5 &= a^3 - 5a^2 + 3a - 10 \\ \Leftrightarrow a^3 - 4a^2 - 15 &= 0 \end{aligned}$$

$g(a) = a^3 - 4a^2 - 15$ とおくと、 $g'(a) = 3a^2 - 8a$ となる。

$$\begin{aligned} g'(a) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3a^2 - 8a &= 0 \\ \Leftrightarrow a(3a - 8) &= 0 \\ \therefore a &= 0, \frac{8}{3} \end{aligned}$$

より、 $g'(a) = 0$ となるのは、 $a = 0, \frac{8}{3}$ のときである。よって、増減表は以下のようになる。

a	...	0	...	$\frac{8}{3}$	...
$g'(a)$	+	0	-	0	+
$g(a)$	$\nearrow$	-15	$\searrow$	$-\frac{661}{27}$	$\nearrow$

上表より、 $g(a) = 0$ の実数解は1つのみであり、

$$g(4) = -15, g(5) = 10$$

であることから、 $g(a) = 0$ を満たす整数解 a は存在しない。よって、不適である。

以上、[1]-[8]より、 $A \cap C$ の要素の個数が1で、かつ $B \cap C = \phi$ のとき、 $a = -2$ である。このとき、 $A \cup B \cup C$ の要素の個数は9個である。

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
36	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{9}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$
キ	ク	ケ	コ	サ	
$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{6}-36\sqrt{3}+3\sqrt{2}-36$	$\sqrt{6}+36\sqrt{3}-3\sqrt{2}-36$	$\frac{2}{75}x^2+\frac{2}{3}y^2$	

【解説】

〔1〕

$$\begin{aligned}\alpha &= 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i \\ &= 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= 4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= 4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot 9\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right) \\ &= 36\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5}{12}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5}{12}\pi\right)\right\} \\ &= 36\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\end{aligned}$$

となる。よって、 $\alpha\beta$ の絶対値は36、偏角は $\frac{2}{3}\pi$ である。また、

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha} &= \frac{9}{4}\left\{\cos\left(\frac{5}{12}\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5}{12}\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right\} \\ &= \frac{9}{4}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

となり、 $\frac{\beta}{\alpha}$ の絶対値は $\frac{9}{4}$ 、偏角は $\frac{\pi}{6}$ である。方程式 $z^4=\alpha\beta$ の解を実数 r, θ を用いて

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ($r>0, 0\leq\theta<2\pi$) とおくと、

$$\begin{aligned}z^4 &= \alpha\beta \\ \Leftrightarrow r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta) &= 36\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\end{aligned}$$

となる。両辺の絶対値と偏角を比較すると、

$$\begin{aligned}&\begin{cases} r^4=36 \\ 4\theta=\frac{2}{3}\pi+2n\pi \end{cases} \\ \therefore &\begin{cases} r=\sqrt{6} \ (\because r>0) \\ \theta=\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

を得る。ただし、 n は整数である。 $0\leq\theta<2\pi$ より、 $n=0, 1, 2, 3$ 、すなわち

$\theta=\frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{5}{3}\pi$ である。実部が最も大きくなるのは、 $\theta=\frac{\pi}{6}$ のときであり、

$$\begin{aligned}z_1 &= \sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i\end{aligned}$$

である。また、実部が2番目に大きくなるのは、 $\theta=\frac{5}{3}\pi$ のときであり、

$$\begin{aligned}z_2 &= \sqrt{6}\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i\end{aligned}$$

である。点Sを実数 a, b を用いて $a+bi$ とおく。点Sを中心に点Qを $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させると点

Rと一致するため、

$$\begin{aligned}&\{z_1-(a+bi)\}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=36\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)-(a+bi) \\ \Leftrightarrow &\left(b-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-a\right)i=(-18-a)+(18\sqrt{3}-b)i\end{aligned}$$

が成り立つ。両辺の実部と虚部を比較すると

$$\begin{cases} b-\frac{\sqrt{6}}{2}=-18-a \\ \frac{3\sqrt{2}}{2}-a=18\sqrt{3}-b \end{cases}$$

となる。これを解いて、

$$\begin{cases} a=\frac{\sqrt{6}-36\sqrt{3}+3\sqrt{2}-36}{4} \\ b=\frac{\sqrt{6}+36\sqrt{3}-3\sqrt{2}-36}{4} \end{cases}$$

を得る。したがって、点Sを表す複素数は

$$\frac{\sqrt{6}-36\sqrt{3}+3\sqrt{2}-36}{4}+\frac{\sqrt{6}+36\sqrt{3}-3\sqrt{2}-36}{4}i$$

である。 v は原点を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の円上を動くため、実数 α を用いて

$v=\sqrt{6}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ ($0\leq\alpha<2\pi$) とおける。このとき、

$$\begin{aligned}w &= v+\frac{9}{v} \\ &= \sqrt{6}(\cos\alpha+i\sin\alpha)+\frac{9}{\sqrt{6}}\{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)\} \\ &= \sqrt{6}(\cos\alpha+i\sin\alpha)+\frac{3\sqrt{6}}{2}(\cos\alpha-i\sin\alpha) \\ &= \frac{5\sqrt{6}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{6}}{2}i\sin\alpha\end{aligned}$$

となる。 $w=x+yi$ より、

$$\begin{cases} x=\frac{5\sqrt{6}}{2}\cos\alpha \\ y=-\frac{\sqrt{6}}{2}\sin\alpha \end{cases}$$

を得る。ゆえに、

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha &= 1 \\ \Leftrightarrow &\left(\frac{2}{5\sqrt{6}}x\right)^2+\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}y\right)^2=1 \\ \therefore &\frac{2}{75}x^2+\frac{2}{3}y^2=1\end{aligned}$$

となり、 w に対応する点が描く図形は x と y を用いた方程式 $\frac{2}{75}x^2+\frac{2}{3}y^2=1$ で表される。

Ⅲ

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
1	-1	$\frac{4}{a}-1$	$-\frac{4}{a}+3$	$2\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{2} a-2 }{a}$
キ	ク	ケ	コ	サ	シ
1	$\frac{2}{3}$	$2(\sqrt{2}-1)$	$\frac{3-t}{1-t}$	$1-\sqrt{2}$	8

〔解説〕

ℓ_1 と ℓ_2 の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned}x &= -x + 2 \\ \Leftrightarrow 2x &= 2 \\ \therefore x &= 1\end{aligned}$$

となる。また、これを $y=x$ に代入すると、 $y=1$ を得る。よって、点 P の座標は $(1, 1)$ である。 ℓ_1 と C の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned}x &= -\frac{a}{2}x^2 + x + \frac{a}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{a}{2}x^2 - \frac{a}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(x-1) &= 0 \quad (\because a > 0) \\ \therefore x &= -1, 1\end{aligned}$$

となる。点 Q は点 P と異なるため、点 Q の x 座標は $x=-1$ であり、これを $y=x$ に代入すると、 $y=-1$ となる。よって、点 Q の座標は $(-1, -1)$ である。 ℓ_2 と C の交点の x 座標は

$$\begin{aligned}-x + 2 &= -\frac{a}{2}x^2 + x + \frac{a}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(ax^2 - 4x + 4 - a) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)\{ax - (4-a)\} &= 0 \\ \therefore x &= 1, \frac{4}{a} - 1 \quad (\because a > 0)\end{aligned}$$

となる。点 R は点 P と異なるため、点 R の x 座標は $x=\frac{4}{a}-1$ であり、これを $y=-x+2$ に代入

すると、 $y=-\frac{4}{a}+3$ となる。よって、点 R の座標は $\left(\frac{4}{a}-1, -\frac{4}{a}+3\right)$ である。

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \sqrt{\{1-(-1)\}^2 + \{1-(-1)\}^2} \\ &= 2\sqrt{2} \\ \overline{PR} &= \sqrt{\left\{1-\left(\frac{4}{a}-1\right)\right\}^2 + \left\{1-\left(-\frac{4}{a}+3\right)\right\}^2} \\ &= \sqrt{\left(2-\frac{4}{a}\right)^2 + \left(-2+\frac{4}{a}\right)^2} \\ &= \sqrt{8\left(\frac{a-2}{a}\right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}|a-2|}{a} \quad (\because a > 0)\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &\leq 2\overline{PR} \text{ かつ } \overline{PR} \leq 2\overline{PQ} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\overline{PQ} &\leq \overline{PR} \leq 2\overline{PQ} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2} &\leq \frac{2\sqrt{2}|a-2|}{a} \leq 4\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \frac{a}{2} &\leq |a-2| \leq 2a \quad (\because a > 0) \\ \Leftrightarrow \frac{a}{2} &\leq a-2 \leq 2a \text{ または } -2a \leq a-2 \leq -\frac{a}{2} \\ \Leftrightarrow a &\geq 4 \text{ または } \frac{2}{3} \leq a \leq \frac{4}{3}\end{aligned}$$

となる。ゆえに、正の整数 a がとり得る最小の値は 1 である。P $(1, 1)$, Q $(-1, -1)$, R $(3, -1)$ であるため、 $\triangle PQR$ の重心を G とすると、点 G の座標は

$$\left(\frac{1-1+3}{3}, \frac{1-1-1}{3}\right) = \left(1, -\frac{1}{3}\right)$$

となる。外心を H とし、外心の座標を求める。PQ の垂直二等分線は、傾きが -1 で、PQ の中点 $(0, 0)$ を通るため、その方程式は

$$y = -x$$

である。また、QR は x 軸に平行であり、QR の中点の座標は $(1, -1)$ であるため、QR の垂直二等分線の方程式は $x=1$ である。外心は PQ と QR の垂直二等分線の交点であるため、その

座標は $(1, -1)$ となる。以上より、 $\triangle PQR$ の重心と外心の距離 $\overline{GH}$ は

$$\overline{GH} = \left| -\frac{1}{3} - (-1) \right| = \frac{2}{3}$$

である。また、

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= 2\sqrt{2} \\ \overline{PR} &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

である。直線 PQ と直線 PR の傾きの積は $1 \cdot (-1) = -1$ であるため、 $PQ \perp PR$ である。したがって、 $\triangle PQR$ は $PQ = PR$ の直角二等辺三角形であり、その面積は、

$$\begin{aligned}\triangle PQR &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \\ &= 4\end{aligned}$$

となる。内接円の半径を r とすると、

$$\begin{aligned}\triangle PQR &= \frac{r}{2}(\overline{PQ} + \overline{PR} + \overline{QR}) \\ \Leftrightarrow 4 &= \frac{r}{2}(2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4) \\ \Leftrightarrow r &= \frac{2}{\sqrt{2}+1} \\ \therefore r &= 2(\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

となる。D, E はそれぞれ線分 PQ, PR 上の端点以外の点であるため、 $-1 < t < 1, 1 < u < 3$ である。

$$\begin{aligned}\text{PD} : \text{PQ} &= 1-t : 2 \\ \text{PE} : \text{PR} &= u-1 : 2\end{aligned}$$

であるため、 $\triangle PQR$ の面積が $\triangle PDE$ の面積の 2 倍となるのは、

$$\begin{aligned}\frac{\text{PD}}{\text{PQ}} \cdot \frac{\text{PE}}{\text{PR}} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow (1-t)(u-1) &= 2 \\ \Leftrightarrow u &= 1 + \frac{2}{1-t} \quad (\because -1 < t < 1) \\ \therefore u &= \frac{3-t}{1-t}\end{aligned}$$

のときである。このとき、

$$\begin{aligned}f(t) &= (t-u)^2 + \{t-(-u+2)\}^2 \\ &= \left(t - \frac{3-t}{1-t}\right)^2 + \left(\frac{3-t}{1-t} + t - 2\right)^2 \\ &= \left(t - 1 - \frac{2}{1-t}\right)^2 + \left(t - 1 + \frac{2}{1-t}\right)^2 \\ &= 2(1-t)^2 + \frac{8}{(1-t)^2}\end{aligned}$$

である。 $2(1-t)^2 > 0, \frac{8}{(1-t)^2} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の関係式より、

$$\begin{aligned}f(t) &\geq 2\sqrt{2(1-t)^2 \cdot \frac{8}{(1-t)^2}} \\ &= 8\end{aligned}$$

が成り立つ。等号が成り立つのは、

$$\begin{aligned}2(1-t)^2 &= \frac{8}{(1-t)^2} \\ \Leftrightarrow (1-t)^4 &= 4 \\ \Leftrightarrow 1-t &= \sqrt{2} \quad (\because 0 < 1-t < 2) \\ \therefore t &= 1-\sqrt{2}\end{aligned}$$

のときである。以上より、 $f(t)$ が最小となるときの t の値は $1-\sqrt{2}$ であり、 $f(t)$ の最小値は

8 である。

IV

〔解答〕

〔1〕	ア	イ	ウ	エ	オ		
	0	0	2	0	6		
〔2〕	カ						
	$-xe^{-x}-e^{-x}$						
	(a)	キ					
		$\frac{4(e-1)}{e}$					
	(b)	ク	ケ				
		$-2x+4$	$\frac{e-1}{e}$				
	(c)	コ					
		e^{-2k}					
	(d)	サ					
		$\frac{2(e-1)}{e+1}$					

〔解説〕

〔1〕

$$f(-2)=f(0)$$

$$=0$$

$$f(2)=f(0)$$

$$=0$$

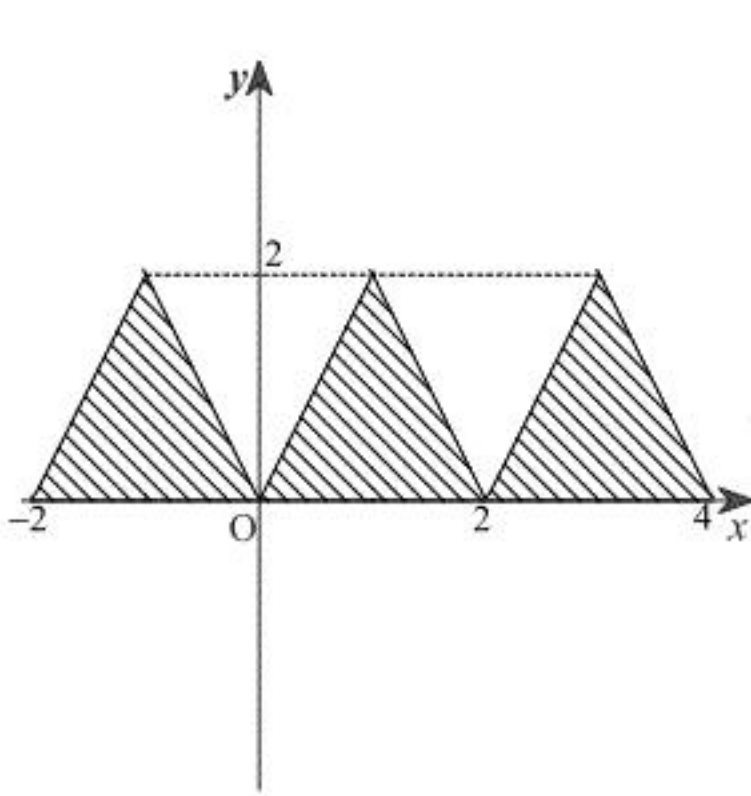
$$f(3)=f(1)$$

$$=2$$

$$f(4)=f(2)$$

$$=0$$

である。 $-2\leq x\leq 4$ において、 $y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形は以下の図の斜線部
のようになる。



上図より、求める面積は、3つの三角形の和であり、

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 3=6$$

である。

〔2〕

$$\int xe^{-x}dx=\int x\left(-e^{-x}\right)'dx$$

$$=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx$$

$$=-xe^{-x}-e^{-x}+C$$

である。

(a)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1e^{-x}f(x)dx&=\int_{-1}^0-2xe^{-x}dx+\int_0^12xe^{-x}dx\\&=-2\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]_{-1}^0+2\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]_0^1\\&=-2\{(0-1)-(e-e)\}+2\{(-e^{-1}-e^{-1})-(0-1)\}\\&=\frac{4(e-1)}{e}\end{aligned}$$

である。

(b)

$f(x)=f(x-2)$ であり、 $1\leq x\leq 2$ のとき、 $-1\leq x-2\leq 0$ であるため、 $f(x)$ は絶対値を用いず
に

$$f(x)=f(x-2)$$

$$=-2(x-2)$$

$$=-2x+4$$

と表される。よって、

$$\begin{aligned}\int_0^2e^{-x}f(x)dx&=\int_0^1e^{-x}\cdot 2xdx+\int_1^2e^{-x}\cdot (-2x+4)dx\\&=2\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]_0^1-2\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]_1^2+4\left[-e^{-x}\right]_1^2\\&=2\{(-e^{-1}-e^{-1})-(0-1)\}-2\{(-2e^{-2}-e^{-2})-(-e^{-1}-e^{-1})\}+4\{(-e^{-2})-(-e^{-1})\}\\&=\frac{2}{e^2}-\frac{4}{e}+2\\&=\frac{2}{e^2}(1-2e+e^2)\\&=2\left(\frac{e-1}{e}\right)^2\end{aligned}$$

となる。

(c)

$u=x-2k$ とおくと、

$$du=dx$$

であり、 x と u の対応関係は

x	$2k$	$\rightarrow$	$2k+2$
u	0	$\rightarrow$	2

となる。したがって、

$$\begin{aligned}\int_{2k}^{2k+2}e^{-x}f(x)dx&=\int_0^2e^{-(u+2k)}f(u+2k)du\\&=e^{-2k}\int_0^2e^{-u}f(u)du\left(\because f(u+2k)=f(u)\right)\\&=e^{-2k}\cdot 2\left(\frac{e-1}{e}\right)^2\end{aligned}$$

である。

(d)

$\int_0^{2n}ne^{-nx}f(nx)dx$ は、 $t=nx$ と置換すると、 $dt=ndx$ であり、 x と t の対応関係は

x	0	$\rightarrow$	$2n$
t	0	$\rightarrow$	$2n^2$

である。したがって、

$$\int_0^{2n}ne^{-nx}f(nx)dx=\int_0^{2n^2}e^{-t}f(t)dt$$

となる。これと(c)の結果より、

$$\begin{aligned}\int_0^{2n^2}e^{-t}f(t)dt&=\sum_{k=0}^{n^2-1}\int_{2k}^{2k+2}e^{-t}f(t)dt\\&=\sum_{k=0}^{n^2-1}e^{-2k}\cdot 2\left(\frac{e-1}{e}\right)^2\\&=2\left(\frac{e-1}{e}\right)^2\cdot \frac{1-e^{-2n^2}}{1-e^{-2}}\end{aligned}$$

を得る。ゆえに、

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}\int_0^{2n}ne^{-nx}f(nx)dx&=\lim_{n\rightarrow\infty}\left\{2\left(\frac{e-1}{e}\right)^2\cdot \frac{1-e^{-2n^2}}{1-e^{-2}}\right\}\\&=2\left(\frac{e-1}{e}\right)^2\cdot \frac{1}{1-e^{-2}}\\&=2\left(\frac{e-1}{e}\right)^2\cdot \frac{e^2}{(e-1)(e+1)}\\&=\frac{2(e-1)}{e+1}\end{aligned}$$

である。