

(第3時限：80分)

2024年度 ①

選 択 科 目 (全49ページ)

問 題

ページ

政治・経済	1～8
日本史	9～18
世界史	19～30
地理	31～42
数学	43～49

注 意 事 項

- 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 解答にあたっては、上記の科目から1科目を選択しなさい。
- 解答はすべて別紙の解答用紙に記入しなさい。
- 試験終了後、問題冊子・選択しなかった解答用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次の I, II, III の設問について解答せよ。ただし、I, II については問題文中の
□ にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入せよ。なお、解答が
分数になる場合は、すべて既約分数で答えること。

I

[1]

(1) x は実数、 a, b は 0 以上の定数とし、次の条件 P, Q, R を考える。

$$P : x^2 - 9x + 8 \leq 0$$

$$Q : (x - a)^2 \leq 4$$

$$R : |x - 1| \leq b$$

- ① P を満たす x の値の範囲は □ ア である。
- ② P が Q の必要条件であるとき、 a の値の範囲は □ イ である。
- ③ Q が R の必要十分条件であるとき、 a, b の値は $a =$ □ ウ ,
 $b =$ □ エ である。

(2) x, y は実数とする。次の □ にあてはまるものを下の選択肢より
1 つ選び記号で答えよ。

- ① $x^2 + y^2 = 0$ は、 $xy = 0$ であるための □ オ
- ② $(x - 1)(y - 1) \geq 0$ は、 $x \geq 1$ または $y \geq 1$ であるための □ カ
- ③ x が有理数であることは、 x^2, x^5 がともに有理数であるための □ キ

【選択肢】

- Ⓐ 必要十分条件である。
- Ⓑ 必要条件であるが十分条件でない。
- Ⓒ 十分条件であるが必要条件でない。
- Ⓓ 必要条件でも十分条件でもない。

[2] a, b, c は定数とする。2次関数 $y = ax^2 + bx + c \cdots \cdots ①$ のグラフが3点 A(4, 2), B(1, -1), C(-1, 7) を通る。

(1) 2次関数①は, $y = \boxed{\text{ク}}$ である。

(2) 2次関数①のグラフ上の点Dが, $AD = BD$ を満たすとき, 点Dの座標は, $(\boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コ}})$ である。ただし, $1 \leqq \boxed{\text{ケ}} \leqq 4$ である。次に, 3点A, D, Bと点Eでできる四角形ADBEがひし形であるとき, 点Eの座標は $(\boxed{\text{サ}}, \boxed{\text{シ}})$ である。

(3) 点Pは, 2次関数①のグラフ上の点Aから点Bの間にある。点Pと直線ABとの距離が最大となるのは, 点Pのx座標が $\boxed{\text{ス}}$ のときである。またそのときの最大値は $\boxed{\text{セ}}$ である。

[3] $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ ① とし, 連立方程式

$$\begin{cases} \cos 2y = \sin x & \dots \dots \text{②} \\ \sin y = \sin 2x & \dots \dots \text{③} \end{cases}$$

を考える。②の右辺について, すべての x で $\sin x = \cos(\boxed{\text{ソ}})$ が成り立つ, ①の範囲により, $2y = \boxed{\text{ソ}}$ を得る。 $\boxed{\text{ソ}}$ は, 次の選択肢から正しいものを 1 つ選び記号で答えよ。

【選択肢】 $\boxed{\textcircled{a}} \frac{\pi}{2} - x \quad \boxed{\textcircled{b}} \frac{\pi}{2} + x \quad \boxed{\textcircled{c}} \pi - x \quad \boxed{\textcircled{d}} \pi + x$

次に、③の右辺について、すべての x で $\sin 2x = \sin(\boxed{\text{タ}})$ が成り立ち、①の範囲により、 $y = 2x$ 、または、 $y = \boxed{\text{タ}}$ を得る。 $\boxed{\text{タ}}$ は、次の選択肢から正しいものを 1 つ選び記号で答えよ。

- 【選択肢】 ⑧ $\frac{\pi}{2} - 2x$ ⑨ $\frac{\pi}{2} + 2x$ ⑩ $\pi - 2x$ ⑪ $\pi + 2x$

$2y = \boxed{\text{ソ}}$ と $y = 2x$ 、および $2y = \boxed{\text{ソ}}$ と $y = \boxed{\text{タ}}$ から、

$x = \boxed{\text{チ}}$ 、 $\boxed{\text{ツ}}$ を得る。ただし、 $\boxed{\text{チ}} < \boxed{\text{ツ}}$ とする。

次に、2倍角の公式を使うと、

$$\text{②は } \sin x = 1 - \boxed{\text{テ}} \cdots \text{④}$$

$$\text{③は } \sin y = \boxed{\text{ト}} \cdots \text{⑤}$$

となる。ただし、 $\boxed{\text{テ}}$ は x を含まず、 $\boxed{\text{ト}}$ は y を含まない。④、⑤より、 $\sin y$ を消去し $t = \sin x$ とおいて整理すると整数係数の t の 4 次方程式

$$\boxed{\text{ナ}} t^4 - \boxed{\text{ニ}} t^2 - t + \boxed{\text{ヌ}} = 0 \cdots \text{⑥}$$

が得られる。 $x = \boxed{\text{チ}}$ のときは $0 < t < 1$ であるので、⑥を解くと

$t = \boxed{\text{ネ}}$ となる。

よって、 $\sin(\boxed{\text{チ}}) = \boxed{\text{ネ}}$ である。

II Aさんは2024年1月1日より、毎年一定金額を積み立てて預金をすることにした。いま、2つの銀行があり、どちらの銀行のほうがよりお金が貯まるかを考えている。銀行Gは利率が単利計算の口座で、銀行Hは利率が複利計算の口座という違いがある。

ここで、

- 単利計算とは預け入れ期間中の元金についてのみ利息をつける方法
- 複利計算とは預け入れ期間の途中でそれまでについた利息を元金に加え、その金額をもとに利息をつける方法

である。

なお、Aさんは毎年1月1日にお金を預けるものとする。また、利息はその年の12月31日につくものとし、以降 n 年後と表記したときは n 年後の12月31日に利息がついた直後とする。

ただし、 $1.01^2 = 1.020$, $1.01^3 = 1.030$, $1.01^4 = 1.040$, $1.01^5 = 1.051$,
 $1.05^{14} = 2.000$, $1.05^{15} = 2.080$, $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$,
 $\log_{10} 5 = 0.699$, $\log_{10} 1.04 = 0.017$ として計算せよ。

[1] まずAさんが毎年10000円ずつ1年間の利率が1%である銀行Gに積み立てる場合を考える。銀行Gは単利計算の口座のため、1年目に預けたお金は1年後に $10000 \times 0.01 = 100$ 円の利息がついて、元金と利息を合わせた金額である元利合計は10100円となる。1年目に預けたお金は2年後に $10000 \times 0.01 + 10000 \times 0.01 = 200$ 円の利息がつくため元利合計は10200円となる。1年目に預けたお金は3年後に [ア] 円だけ利息がつくため元利合計は [イ] 円となる。Aさんが毎年10000円ずつ5年間銀行Gで積み立てを行った場合、元利合計は5年後に [ウ] 円となる。

一方で、毎年10000円ずつ1年間の利率が1%である銀行Hに積み立てる場合を考える。銀行Hは複利計算の口座のため、1年目に預けたお金は1年後に $10000 \times 0.01 = 100$ 円の利息がつき、元利合計は10100円となる。2年後には1年目の元利合計である $10000(1 + 0.01)$ 円を元金として利息がついて、その元利合計は

$$10000(1 + 0.01) + 10000(1 + 0.01) \times 0.01 = 10000(1 + 0.01)^2$$

より 10200 円となる。1 年目に預けたお金の 3 年後の元利合計は、工 円となる。A さんが 5 年間銀行 H で積み立てを行った場合、元利合計は 5 年後にオ 円となる。したがって、A さんはより多くの元利合計を得ることのできる銀行カ に預け入れる。なお、カ は G か H のどちらかで解答せよ。

[2] 每年 C 円ずつ 1 年間の利率が r である銀行 G に積み立てる場合、1 年目に預け入れた C 円は n 年後に $(\boxed{\text{キ}}) \times C$ 円になる。同様に、毎年 1 月 1 日に預け入れた C 円が n 年後にいくらになっているかを考え、それらの和をとると n 年後の元利合計は $(\boxed{\text{ク}}) \times C$ 円となる。

[3] 每年 C 円ずつ 1 年間の利率が r である銀行 H で積み立てる場合、 n 年後の元利合計は初項ケ、公比コ、項数 n の等比数列の和となる。したがって、元利合計はサ $\times C$ 円となる。

[4] 1 年間の利率が 5 % であるときに、銀行 H で 14 年後に元利合計が 63 万円になるためには、毎年シ 円ずつ積み立てればよい。

[5] 1 年間の利率が 4 % であるときに、目標の元利合計を 104 万円として毎年 4 万円ずつ銀行 H で積み立てる。このとき、最短でス 年後にこの目標を達成することができる。

III 次の図のように7つの部分に分けられた長方形がある。7つの部分 A~G を絵の具を使って塗り分ける。ただし、隣り合う部分には異なる色を塗るものとする。

例えば、A と B, A と D は隣り合うため異なる色を塗る。また、A と E, C と E は隣り合わないため同じ色を塗ってもよい。このとき、次の問い合わせに答えよ。

A	D	G
B	E	
C	F	

図

[1]

(1) 7色で塗り分ける方法は何通りあるか求めよ。

(2) n を自然数とする。 n 色で7つの部分を塗り分けるとき、最小の n の値を求めよ。また、そのとき、塗り分ける方法は何通りあるか求めよ。

(3) 5色で塗り分ける方法は何通りあるか求めよ。

[2] 「赤」と書かれたカードが3枚、「青」と書かれたカードが2枚、「黄」と書かれたカードと、「緑」と書かれたカードがそれぞれ1枚ある。これら7枚のカードをよく混せて、一列に並べる。最初のカードに書かれている色を部分 A に塗る。2番目のカードに書かれている色を部分 B に塗る。このように、一列に並んでいるカードの順番にしたがって、そのカードに書かれている色を部分 A からアルファベット順に部分 G まで塗る。

(1) 隣り合う部分が異なる色で塗り分けられている確率を求めよ。

(2) 隣り合う部分が異なる色で塗り分けられているときに、部分 A の色が「黄」または「緑」である確率を求めよ。

