

(第3時限：100分)

2024年度 ②

数 学 問 題

(理 系)

(全6ページ)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
3. 解答用紙1枚・下書用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを、
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。なお、分数を記入する際は、既約分数を記入し
なさい。

Ⅰ x を自然数、 p を素数として、 x を p で割った商を q 、余りを r ($0 \leq r < p$) とす
る。

〔1〕 x^2 を r について整理された整式で表すと $x^2 =$ ア となる。また、 n を
自然数として、 x^n について同様に考えると

$$x^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k \text{ イ } r^k$$

と与えられる。ただし、 ${}_n C_k$ は n 個の事象から k 個を選び取る時の組合せの
数であり、整数の 0 乗は 1 とする。これより、 x^n を p で割った余りは ウ
を p で割った余りと等しい。さらに、自然数 i, j に対して x^i を p で割った余
りを s 、 x^j を p で割った余りを t とすれば、 x^{i+j} を p で割った余りは s と t に関
する整式である エ を p で割った余りに等しい。ただし、 ウ と
 エ は x, p を用いずに表せ。

〔2〕 31^2 を 7 で割った余りは オ であり、 31^3 を 7 で割った余りは カ
となる。同様に考えると、自然数 k について、 31^k を 7 で割った余りが 1 とな
るのは、 k が キ の倍数となるときである。一方、 31^k を 11 で割った余り
が 1 となるのは、 k が ク の倍数となるときである。ただし、 キ > 0 、
 ク > 0 である。

以上より、 31^k を 7 で割った余りと 11 で割った余りがともに 4 になる k を
具体的に求めることができる。そのような自然数 k で最小のものは ケ で
あり、5 番目に小さなものは コ となる。

(このページは空白)

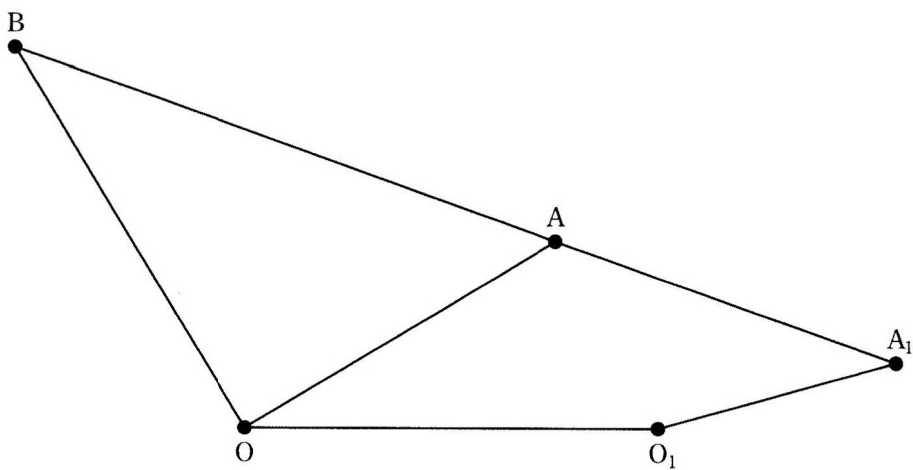
Ⅱ 図のように、同一直線上にない3点 O, A, B を平面上にとり、 $\triangle OAB$ を考える。ただし、 $|\overrightarrow{OB}| = 1, |\overrightarrow{OA}| = p, p < 1$ とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。線分 AB を $p^2 : (1 + p^2)$ に外分する点を A_1 とする。さらに、点 O_1 を $\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{OA_1} - p^2 \vec{a}$ を満たすようにとる。

〔1〕 $\overrightarrow{OA_1}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表すと、ア となり、 $\overrightarrow{O_1A}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表すと、イ となる。ゆえに、 $\triangle OAB$ と $\triangle O_1A_1A$ は相似であり、 $\triangle O_1A_1A$ の面積は $\triangle OAB$ の面積の ウ 倍である。

〔2〕 同様に $\triangle O_1A_1A$ に対して線分 A_1A を $p^2 : (1 + p^2)$ に外分する点 A_2 をとり、さらに点 O_2 を $\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{O_1A_2} - p^2 \overrightarrow{O_1A_1}$ を満たすようにとる。このとき、 $\overrightarrow{OO_2}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表すと、エ となることから、 O, O_1, O_2 は同一直線上にあることがわかる。この操作を続けて、 $n = 3, 4, \dots$ について

$\triangle O_{n-1}A_{n-1}A_{n-2}$ から点 A_n 、点 O_n を順に定める。直線 AB と直線 OO_1 の交点を D とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\overrightarrow{A_nD}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\overrightarrow{O_nD}| = 0$ を用いると $|\overrightarrow{BD}| =$ オ $|\overrightarrow{AB}|$ かつ $|\overrightarrow{OD}| =$ カ $|\overrightarrow{OO_1}|$ が成り立つことが分かる。

〔3〕 $\angle AOB = 90^\circ$ とする。このとき、上で定めた D に対して、 O を通る OD の垂線を引き、 AB との交点を E とおく。このとき、 $\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表すと、キ となる。ゆえに、 $\frac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{ED}|}$ を p を用いて表すと、ク となる。



図

図は参考であり、正確ではない。

Ⅲ a を実数の定数として、関数 $f(x)$ を $f(x) = (x^2 + a)e^{-x}$ とおく。ただし、 e は自然対数の底である。

[1] $a = 0$ とする。このとき、 $f(x)$ は $x = \boxed{\text{ア}}$ のとき極小値、 $x = \boxed{\text{イ}}$

のとき極大値をとり、 $\int_{\boxed{\text{ア}}}^{\boxed{\text{イ}}} f'(x) dx = \boxed{\text{ウ}}$ である。

[2] x についての方程式 $f'(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつための必要十分条件を a で表すと、 $\boxed{\text{エ}}$ である。このとき、導関数 $f'(x)$ は $x = \boxed{\text{オ}}$ のとき最大値をとる。

[3] 関数 $g(x)$ は $f(x)$ の原始関数で、かつ $g(x)e^x$ は x の多項式であるとする。

$g(x) = \int_0^x f(t) dt$ が成立するのは、 $a = \boxed{\text{カ}}$ のときである。また、 x に

についての方程式 $g(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつための必要十分条件を a で表すと、 $\boxed{\text{キ}}$ である。このとき、曲線 $y = f'(x)$ の $y \geq 0$ の部分と x 軸で囲まれる部分の面積を S_1 、曲線 $y = g(x)$ の $y \geq 0$ の部分と x 軸で

囲まれる部分の面積を S_2 とおくと、 $\lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{S_2}{S_1} = \boxed{\text{ク}}$ が成り立つ。

IV 実数値をとる数列 $\{X_n\}$ に対して、数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式により定義する：

$$a_n = \begin{cases} X_1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} - \frac{1}{n} (a_{n-1} - X_n) & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

〔1〕 a_2, a_3 を $\{X_n\}$ の項を用いて表すと、 $a_2 = \boxed{\text{ア}}$ ， $a_3 = \boxed{\text{イ}}$ となる。

以下、 a_n の一般項を求める。そのため、 $b_n = na_n$ により数列 $\{b_n\}$ を定めると、 $\{b_n\}$ の漸化式 $b_{n+1} = pb_n + qX_{n+1}$ が、 $(p, q) = \boxed{\text{ウ}}$ に対して成り立つ。これより、 a_n の一般項は $X_1, \dots, X_n$ を用いて $\boxed{\text{エ}}$ と表すことができる。

〔2〕 表と裏の出る確率が等しいコインを投げて表が出たら 1 点、裏が出たら 0 点であるゲームを考える。1 回目の点数を X_1 ，2 回目の点数を X_2 ，というように自然数 n に対して、 n 回目の点数を X_n と表すことにする。

各 n について、 $X_n = 1$ である確率は常に $\boxed{\text{オ}}$ であることより、 $a_2 = 1$ となる確率は $\boxed{\text{カ}}$ であり、 $a_3 = 0$ である確率は $\boxed{\text{キ}}$ である。また、 $a_8 \leq \frac{1}{4}$ となる確率は $\boxed{\text{ク}}$ である。 n が奇数のとき、 $a_n \leq \frac{1}{2}$ である確率は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

〔3〕 表が出る確率が p であるコインを用いて、〔2〕と同様に $\{X_n\}$ を定める。ただし、 $0 \leq p \leq 1$ とする。このとき、 $a_n = 0$ である確率を p, n を用いて表すと、 $\boxed{\text{コ}}$ である。また、2 以上の自然数 n を 1 つ固定したとき、 $na_n = 2$ となる確率が最も高くなるのは、 $p = \boxed{\text{サ}}$ のときである。

