

(第3時限：100分)

2024年度 ②

数 学 問 題

(全5ページ)

理系型3教科方式 薬 学 方 式

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
3. 解答用紙1枚・下書用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。なお，分数を記入する際は，既約分数を記入しなさい。

Ⅰ

〔1〕 $0 \leq x < 2\pi$ において，関数 $f(x) = 2\sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 4\cos^2 x$

を考える。 $f(x)$ は $2x$ を用いて変形すると，

$$f(x) = \text{ア} \sin \left(2x + \text{イ} \right) + \text{ウ}$$

と表される。ただし， $0 \leq \text{イ} < 2\pi$ とする。

このとき， $f(x)$ の最大値は エ であり，最大値をとる x のなかで最も大きな値は オ である。

また， a が実数であるとき， x についての方程式 $f(x) = a$ の異なる実数解が $0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ に3つあるような a の値の範囲は， カ である。

〔2〕 x の方程式 $2^{x+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} = 8^a$ (a は定数) …… ① を考える。

$t = 2^x$ とすると，①は $t^2 - 2^{\text{キ}} \times t - \text{ク} = 0$ …… ② と t の2次方程式に変形できる。

$a = \frac{2}{3}$ のとき，②の解は $t = \text{ケ}$ であり，したがって，①の解は $x = \text{コ}$ である。

また， $x = 3$ が①の解となるとき， $a = \text{サ} \left(1 + \log_2 \text{シ} \right)$ である。

〔3〕 次の表は生徒5人（番号 $i = 1 \sim 5$ ）の身長 x_i (cm) と体重 y_i (kg) を測定した結果をまとめたものである。 $\bar{x}$, $\bar{y}$ はそれぞれ x_i , y_i の平均を表す。この表より、以下の数値を求めよ。ただし、解答が無理数の場合はそのままでよい。

表

i	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	181	75	10	10	100	100	100
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
5	165	61	- 6	- 4	36	16	24
合計	ス	325	0	0	160	160	140

身長の合計は ス (cm) とわかる。また、身長の標準偏差は セ (cm)

であり、身長と体重の相関係数は $\frac{\text{ソ}}{\text{タ}}$ である。

II a を正の定数とし、座標平面上に曲線 $C: y = ax^3$ を考える。

曲線 C 上の点 $P(1, a)$ における接線 ℓ_1 の方程式は $y = \boxed{\text{ア}}$ である。点 P を通り、接線 ℓ_1 と直交する直線 ℓ_2 の方程式は $y = \boxed{\text{イ}}$ である。

$x \geq 0$ の表す領域で、接線 ℓ_1 , y 軸, および曲線 C で囲まれる図形の面積 S_1 は $\boxed{\text{ウ}}$ であり、 $x \leq 0$ の表す領域で、接線 ℓ_1 , y 軸, および曲線 C で囲まれる図形の面積 S_2 は $\boxed{\text{エ}}$ である。

また、直線 ℓ_2 , 曲線 C , および y 軸で囲まれる図形の面積 S_3 は

$$S_3 = \boxed{\text{オ}} \frac{1}{a} + \boxed{\text{カ}} a$$

である。ただし、 $\boxed{\text{オ}}$ と $\boxed{\text{カ}}$ には数値が入る。

ここで、相加平均と相乗平均の関係を使うと、 $S_3 \geq \boxed{\text{キ}}$ となり、等号が成り立つのは、 $a = \boxed{\text{ク}}$ のときである。つまり、 S_3 は $a = \boxed{\text{ク}}$ のとき、最小値 $\boxed{\text{キ}}$ をとる。

また、 $S_1 + S_3 = S_2$ が成り立つとき、 $a = \boxed{\text{ケ}}$ である。

Ⅲ 座標空間に、下の図のような直方体 ABCD-EFGH がある。底面 ABCD は xy 平面に平行、辺 AD は y 軸に平行である。また、頂点 A, B の座標はそれぞれ $A(2, 2, p)$, $B(4, 2, p)$ である。ただし、 $p > 0$ とする。

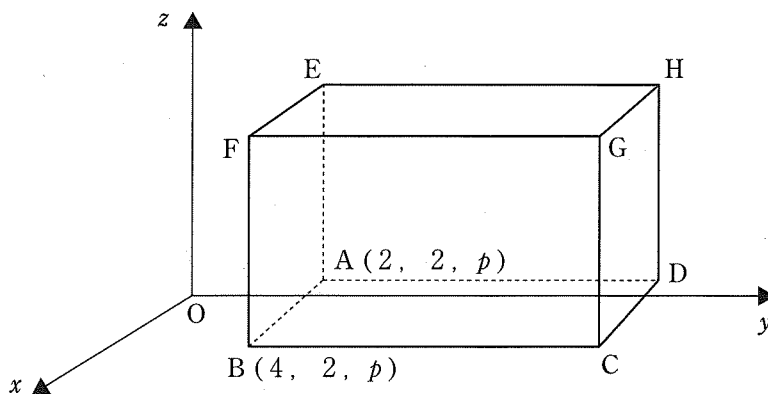
〔1〕 線分 OA の長さが 4 のとき、 $p =$ である。さらに、 $BC = 4$, $CG = 2$ のとき、G の座標は $($, , $)$ である。

〔2〕 〔1〕の直方体を、 z 軸の負の方向に $\frac{p}{2}$ だけ平行移動する。さらに、AD を軸にして、辺 BC が xy 平面に含まれるように、直方体を回転する。ただし、回転する角度 θ は $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ とする。このとき、

頂点 C は $C' ($, , $)$ に移り、

頂点 G は $G' ($, , $)$ に移る。

また、頂点 H は $H' ($, , $)$ に移り、この頂点が H から H' まで動くときに描く軌跡の長さは となる。



図

IV 2種類の微生物 A, B は, その生育の過程で互いに影響を受けることなく, 1時間経つと, A は1個が2個に, B は1個が3個に増える。以下の ア ~ ケ は整数あるいは既約分数で, また, コ ~ シ は n を用いた式で答えよ。

[1] A, B それぞれ1個を1つの容器の中で1時間培養 (1回目培養) 後, 無作為に抽出した1個の個体が A である確率を $P_{A(1)}$ とすると, $P_{A(1)} = \text{ア}$ である。この1回目培養後に1個ではなく2個の個体を無作為に抽出した場合に, 2個とも A である確率を $P_{AA(1)}$, A と B が1個ずつである確率を $P_{AB(1)}$, 2個とも B である確率を $P_{BB(1)}$ とすると, $P_{AA(1)} = \text{イ}$, $P_{AB(1)} = \text{ウ}$, $P_{BB(1)} = \text{エ}$ である。

[2] [1] で行った1回目培養後に無作為に抽出した2個の個体を, 種類を確認せずに先とは別の1つの容器の中で培養し, 1時間経過 (2回目培養) 後に1個の個体を抽出したとき, それが A である確率を $P_{A(2)}$ とし, この2回目培養後に1個ではなく2個の個体を無作為に抽出した場合に, 2個とも A である確率, A と B が1個ずつである確率, 2個とも B である確率を, それぞれ $P_{AA(2)}$, $P_{AB(2)}$, $P_{BB(2)}$ とする。1回目培養後に無作為に抽出した2個の個体が2個とも A あるいは2個とも B であった場合, それ以降は A のみあるいは B のみしか培養されず抽出もされない。1回目培養後に無作為に抽出した2個の個体が A と B であった場合, 2回目培養は1回目培養の繰り返しとなる。したがって, $P_{A(2)} = \text{オ}$, $P_{AA(2)} = \text{カ}$, $P_{AB(2)} = \text{キ}$, $P_{BB(2)} = \text{ク}$ となる。

[3] 以降も同様の抽出と培養を繰り返し, n 回目 (n は2以上の自然数) 培養後に抽出した2個の個体が2個とも A, A と B が1個ずつ, 2個とも B である確率を, それぞれ $P_{AA(n)}$, $P_{AB(n)}$, $P_{BB(n)}$ とすると,

$$P_{AA(n)} = \text{ケ} \times P_{AA(n-1)} + \text{イ} \times P_{AB(n-1)} = \text{コ}$$

$$P_{AB(n)} = \text{ウ} \times P_{AB(n-1)} = \text{サ}$$
 が成り立つから, n 回目培養後に無作為に抽出した1個の個体が A である確率を $P_{A(n)}$ とすると, $P_{A(n)} = \text{シ}$ で表される。

