

(第3時限：100分)

2024年度 ③

数 学 問 題

(理 系)

(全5ページ)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
3. 解答用紙1枚・下書用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。なお，分数を記入する際は，既約分数を記入しなさい。

Ⅰ a, b を実数の定数とする。3次多項式 $f(x) = x^3 + x^2 - ax - b$ について， $f(x)$ を $x - 1$ で割った商は ア ，余りは イ である。 $f(x)$ が $x - 1$ で割り切れるための a, b が満たす必要十分条件は ウ である。特に， $f(x)$ が $x^2 - 1$ で割り切れるとき， $(a, b) =$ エ となる。また，条件 ウ の下で方程式 $f(x) = 0$ が重解をもつための条件は オ である。

次に関数 $y = f(x) = x^3 + x^2 - ax - b$ のグラフ C と関数 $y = x - 1$ のグラフ L を考える。条件 ウ を仮定すると， C と L が異なる3点で交わるための条件は $a >$ カ かつ $a \neq$ キ である。このとき，3つの共有点の x 座標を p, q, r とし， $p < q < r$ とする。 $q < 1$ であるための必要十分条件は ク である。この条件下で， $p \leq x \leq q$ の範囲で C と L に囲まれる部分の面積と $q \leq x \leq r$ の範囲で C と L に囲まれる部分の面積が等しいのは $a =$ ケ のときである。ただし， カ 以降は b を用いずに解答せよ。

Ⅱ 複素数 c に対して、 $\alpha = \frac{|c-1|+c-1}{2}$ 、 $\beta = \frac{|c-1|-c+1}{2}$ とおく。複素数平面上において c 、 α 、 β の表す点をそれぞれ C 、 A 、 B とおく。

[1] $\alpha + \beta$ の虚部は である。また、 c を α 、 β を用いて表すと、
 $c =$ である。特に、 $\alpha = \beta$ が成り立つとき、 $c =$ である。

[2] c が実数であるための必要十分条件は、 $\alpha\beta =$ である。特に、
 $\beta =$ であることは $c \geq$ であることと同値である。

[3] c の実部を 1 とする。このとき、3 点 A 、 B 、 C が同一直線上にあるのは、 c の虚部が のときである。それ以外するとき、 $\triangle ABC$ の面積が 12 となるのは、 c の虚部が のときである。

[4] 線分 AB の中点を表す複素数は である。また、 $\triangle ABC$ が $AC = BC$ を満たす直角二等辺三角形になるとき、 c の実部は となる。

Ⅲ $0 \leq \theta \leq \pi$ として、 θ についての関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) = -3\cos^2 2\theta + \frac{9}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{3}(\sin \theta + \cos \theta)(4\sin 2\theta + 1) + \frac{11}{2}$$

と定める。 $x = \sin \theta + \cos \theta$ とおくと、 θ が $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲を動くとき、 x は

$\boxed{\text{ア}} \leq x \leq \boxed{\text{イ}}$ の範囲を動く。また、 $x^2 = p + q\sin 2\theta$ とすると、

$p = \boxed{\text{ウ}}$ 、 $q = \boxed{\text{エ}}$ である。そこで $f(\theta)$ を x を用いて表すと、 x についての 4 次多項式

$$f(\theta) = \boxed{\text{オ}}$$

となる。そこで、関数 $g(x)$ を $g(x) = \boxed{\text{オ}}$ と定める。 $g(x)$ の導関数は

$$g'(x) = \boxed{\text{カ}}$$

となる。 $g'(x) = 0$ となる x は $x = -\frac{1}{2}$ 、 $\boxed{\text{キ}}$ 、 $\boxed{\text{ク}}$ の 3 つある。これ

より、 θ が $0 \leq \theta \leq \pi$ を動くとき $f(\theta)$ の最大値は $\boxed{\text{ケ}}$ であることがわかる。

IV n を自然数とする。

[1] $\frac{(1+x)^{n+1}}{1+x^{n+1}}$ の $x \geq 0$ における最大値を以下の手順で求める。

$n = 1$ のとき,

$$\frac{(1+x)^2}{1+x^2} = \boxed{\text{ア}} + \frac{\boxed{\text{イ}}}{x^2+1}$$

であり, 任意の x に対して $\boxed{\text{イ}} \leq x^2 + 1$ が成立し, 等号は $x = \boxed{\text{ウ}}$

のとき成立する。よって, $\frac{(1+x)^2}{1+x^2}$ は $x = \boxed{\text{ウ}}$ において最大値 $\boxed{\text{エ}}$

をとることがわかる。

ただし $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ は定数, $\boxed{\text{イ}}$ は x の 2 次未満の整式である。

$n = 2$ のとき,

$$\frac{(1+x)^3}{1+x^3} = \boxed{\text{オ}} + \frac{\boxed{\text{カ}}}{x^2-x+1}$$

であり, 任意の x に対して $\boxed{\text{カ}} \leq \boxed{\text{キ}} (x^2 - x + 1)$ が成立し, 等号

は $x = \boxed{\text{ク}}$ のとき成立する。よって, $\frac{(1+x)^3}{1+x^3}$ は $x = \boxed{\text{ク}}$ におい

て最大値 $\boxed{\text{ケ}}$ をとることがわかる。

ただし $\boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$, $\boxed{\text{ケ}}$ は定数, $\boxed{\text{カ}}$ は x の 2 次未満の整式である。

n を自然数, $x \geq 0$ とするとき, $\frac{(1+x)^{n+1}}{1+x^{n+1}}$ は $x = \boxed{\text{ク}}$ において最大値 $\boxed{\text{コ}}$ をとることを数学的帰納法によって示す。まず, $n = 1$ のときに成り立つことは既に示した。 $n = k$ のとき成り立つと仮定する。

$$\frac{(1+x)^{k+2}}{1+x^{k+2}} = \frac{(1+x)^{k+1}}{1+x^{k+1}} \left(\boxed{\text{サ}} + \frac{\boxed{\text{シ}}}{x^{k+2}+1} \right)$$

であり, 不等式 $\boxed{\text{シ}} \leq x^{k+2} + 1$ が成り立ち, この等号成立は

$x = \boxed{\text{ス}}$ のときである。これと帰納法の仮定より, 不等式

$\frac{(1+x)^{n+1}}{1+x^{n+1}} \leq \boxed{\text{コ}}$ が $n = k + 1$ で成り立つことがわかる。この不等式

の等号が $x = \boxed{\text{ク}}$ で成り立つことは直接計算で確認できる。以上で, 数学的帰納法による証明が完成した。

ただし $\boxed{\text{コ}}$ は n の式, $\boxed{\text{サ}}$, $\boxed{\text{ス}}$ は定数, $\boxed{\text{シ}}$ は x の $k + 2$ 次未満の整式である。

[2] n を自然数とする。 x が正の実数を動くときの

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{n+1}}}{1+x^{\frac{1}{n+1}}}$$

の最小値を n の式で表すと, $\boxed{\text{セ}}$ である。

