

(第2時限：100分)

2024年度 ⑤

数 学 問 題

(理 系)

(全4ページ)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
3. 解答用紙1枚・下書用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。なお，分数を記入する際は，既約分数を記入しなさい。

Ⅰ 座標平面上にある2つの放物線 $P: y = -x^2$ ， $Q: y = (x - 1)^2 + 1$ を考える。

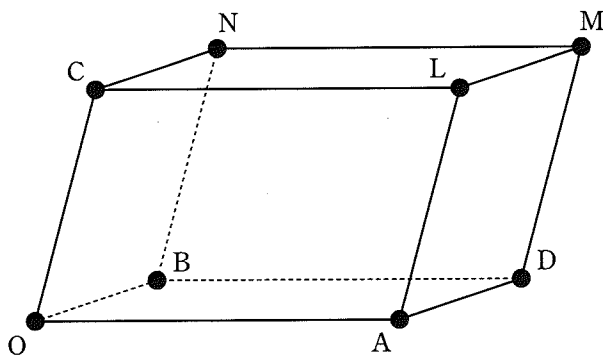
P 上の点 $(t, -t^2)$ における接線の方程式は $y =$ ア で与えられる。

P ， Q には2本の共通接線が存在する。そのうち正の傾きのものを l_1 ，負の傾きのものを l_2 とおく。 l_1 と P の接点を A_1 ， l_1 と Q の接点を B_1 とおくと， A_1 ， B_1 の座標はそれぞれ イ ， ウ である。 l_2 と P の接点を A_2 ， l_2 と Q の接点を B_2 とおくと， A_2 ， B_2 の座標はそれぞれ エ ， オ である。また， l_1 と l_2 の交点の座標は カ である。

四角形 $A_1A_2B_1B_2$ の面積は キ であり， l_1 ， l_2 および P で囲まれた部分の面積は ク である。また， l_1 ， l_2 および Q で囲まれた部分の面積は，四角形 $A_1A_2B_1B_2$ の面積の ケ 倍である。

II 空間上に図のような平行六面体 OADB-CLMN がある。4 点 O, A, B, C に関するベクトルの内積は次を満たしているとする：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 4, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 1, \quad \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 3, \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} &= 10, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} = 2, \quad \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} = 5\end{aligned}$$



図

[1] $\triangle OAB$ を含む平面に点 C から垂線を下ろす。この平面と垂線の交点を H とすると、

$$\overrightarrow{HC} = \boxed{\text{ア}} \overrightarrow{OA} + \boxed{\text{イ}} \overrightarrow{OB} + \boxed{\text{ウ}} \overrightarrow{OC}$$

で表される。よって $|\overrightarrow{HC}| = \boxed{\text{エ}}$ である。また、 $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角を θ とすると、 $\sin \theta = \boxed{\text{オ}}$ であることから、平行四辺形 OADB の面積は $\boxed{\text{カ}}$ であり、平行六面体 OADB-CLMN の体積は $\boxed{\text{キ}}$ であることがわかる。

[2] p, q をそれぞれ 1 未満の正の実数とする。線分 OA を $p:1-p$ に内分する点を P, 線分 OB を $q:1-q$ に内分する点を Q とする。 $\triangle OPQ$ が $OP = OQ$ の二等辺三角形であるとき、 $q = \boxed{\text{ク}} p$ が成り立ち、さらに四面体 OPQC の体積が四面体 OABC の体積の $\frac{1}{4\sqrt{5}}$ 倍になるとき、 $(p, q) = \boxed{\text{ケ}}$ である。このとき、平行六面体の対角線 OM と $\triangle PQC$ を含む平面との交点を K とすると、 $\overrightarrow{OK} = \boxed{\text{コ}} \overrightarrow{OM}$ が成り立つ。

Ⅲ 座標平面上を動く点がある。点 $A(1, 0)$ から出発し、単位円周上を正の向きに点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ まで速さ 1 で動いた後、 P から点 $B(-r, 0)$ まで線分 PB 上を速さ $\frac{1}{3}$ で動く。ただし $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$ とする。各 r に対し、動点が A から B に到着するまでにかかる時間 $T(\theta)$ について考える。

線分 PB の長さを r, θ で表すと ア である。したがって動点が A から B に到着するまでにかかる時間 $T(\theta)$ は、イ である。 $T(\theta)$ の θ に関する導関数を $T'(\theta)$ とする。不等式 $T'(\theta) \geq 0$ が成り立つことは次の不等式が成り立つことと同値である。

$$9r^2 \cos^2 \theta + 2r \cos \theta + \text{ウ} \geq 0$$

ただし ウ は θ を含まない r の整式である。この不等式の左辺を $f(\theta)$ とする。 $0 \leq r \leq \text{エ}$ のとき、 $0 \leq \theta \leq \pi$ を満たすすべての θ に対して $f(\theta) \geq 0$ が成り立つ。よって $T(\theta)$ は $\theta = \text{オ}$ で最小値 カ をとる。

エ $< r < 1$ のとき、方程式 $f(\theta) = 0$ は $0 \leq \theta \leq \pi$ に異なる 2 つの実数解を持つ。特に $r = \frac{2}{3}$ のとき、 $T(\theta)$ を最小にする点 P の x 座標は キ である。また、 $r = 1$ のとき、 $T(\theta)$ を最小にする θ は ク であり、 $T(\theta)$ を最大にする点 P の x 座標は ケ である。

IV 2以上の自然数 n を1つ固定する。0または1を重複を許して合計 n 個選んで横一列に順に並べる。この並びを二進法表記として得られる数を m とおき、逆順に並べたものを二進法表記として得られる数を m' とおく。ただし、二進法表記において、先頭に0が並んでいる場合、その0は除外して考える。例えば、 $n = 2$ のときに数を0, 1と選んだ場合、 $m = 1_{(2)} = 1$, $m' = 10_{(2)} = 2$ である。また、 $n = 3$ のときに数を0, 1, 0と選んだ場合、 $m = m' = 10_{(2)} = 2$ である。

[1] $n = 2$ とする。このとき、 $m = m'$ となるような0, 1の選び方は 通りある。また、 $m - m'$ は $m =$ のとき最小値 をとる。

[2] $n = 3$ とする。このとき、 $m = m'$ となるような0, 1の選び方は 通りある。また、 m' が偶数となるような0, 1の選び方は 通りあり、特に m' がその中で最大の偶数となるのは $m =$ のときである。

[3] n を4以上の自然数とする。 $m - m'$ が4の倍数となる m の個数を n を用いて表すと である。また、 m が4の倍数となるすべての並びに対する m' の総和を n を用いて表すと となる。

