

(第2時限：100分)

2024年度 ⑥

数 学 問 題

(理 系)

(全4ページ)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
3. 解答用紙1枚・下書用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを，
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。なお，分数を記入する際は，既約分数を記入し
なさい。

Ⅰ a を整数とし，3つの集合

$$A = \{-3, 1, a-6, -a^2-a+40, a^3-5a^2+3a-10\}$$

$$B = \{-2, 1, a^2-10a+29, 2a^2-8a-5\}$$

$$C = \{-3a^2+7a+18, -a^2+3a+5\}$$

を考える。

[1] $A \cap B = \{1, 5\}$ のとき， $a =$ ア である。このとき，

$$A \cup B = \{-3, -2, \text{イ}, \text{ウ}, \text{エ}, \text{オ}, \text{カ}\}$$

である。ただし， イ から カ は小さい順に数値で答えよ。

[2] $B \cap C = \{1, k\}$ (k は整数で $k \neq 1$) のとき， $a =$ キ ， $k =$ ク

である。このとき， $B \cup C = \{\text{ケ}, \text{コ}, \text{サ}, \text{シ}\}$ であ

る。ただし， ケ から シ は小さい順に数値で答えよ。

[3] $A \cap C$ の要素の個数が1で，かつ $B \cap C = \phi$ のとき， $a =$ ス である。

このとき， $A \cup B \cup C$ の要素の個数は セ である。

II i は虚数単位である。複素数の偏角は0以上かつ 2π 未満とする。以下、アからコは実数で答えよ。

$\alpha = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$, $\beta = 9 \left(\cos \frac{5}{12}\pi + i \sin \frac{5}{12}\pi \right)$ とする。 $\alpha\beta$ の絶対値はア, 偏角はイである。また $\frac{\beta}{\alpha}$ の絶対値はウ, 偏角はエである。

方程式 $z^4 = \alpha\beta$ の解のうち、実部が最も大きい解を z_1 , 2番目に大きい解を z_2 とする。三角関数を用いずに z_1 と z_2 を表すと $z_1 = \text{オ} + \text{カ}i$, $z_2 = \text{キ} - \text{ク}i$ である。

複素数平面上において z_1 と $\alpha\beta$ に対応する点をそれぞれQとRとする。複素数平面上のある点Sを中心に点Qを $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させると点Rと一致した。このとき点Sを表す複素数は $\frac{\text{ケ}}{4} + \frac{\text{コ}}{4}i$ である。

次に複素数平面上において原点を中心とする半径 $|z_2|$ の円上を動く点を表す複素数を v とする。ここで $w = x + yi$ (x, y は実数)が $w = v + \frac{9}{v}$ を満たすとき, w に対応する点が描く図形は x と y を用いた方程式サ = 1 で表される。

Ⅲ a を正の整数とする。座標平面上で、直線 $y = x$ を ℓ_1 、直線 $y = -x + 2$ を ℓ_2 、

放物線 $y = -\frac{a}{2}x^2 + x + \frac{a}{2}$ を C とする。

2つの直線 ℓ_1 、 ℓ_2 の交点を P とすると、点 P の座標は $(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{ア}})$ である。また、放物線 C も点 P を通る。直線 ℓ_1 と放物線 C との交点のうち点 P とは異なる点を Q とする。このとき点 Q の座標は $(\boxed{\text{イ}}, \boxed{\text{イ}})$ である。直線 ℓ_2 と放物線 C が点 P とは異なる点 R で交わるとき、点 R の座標は a を用いて表すと $(\boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}})$ である。

ここで線分 PQ の長さを $\overline{PQ}$ 、線分 PR の長さを $\overline{PR}$ とすると $\overline{PQ} = \boxed{\text{オ}}$ 、 $\overline{PR} = \boxed{\text{カ}}$ である。ただし、 $\boxed{\text{カ}}$ は a を用いて答えよ。さらに、 $\overline{PQ} \leq 2\overline{PR}$ かつ $\overline{PR} \leq 2\overline{PQ}$ が成り立つとする。このとき正の整数 a がとり得る最小の値は $\boxed{\text{キ}}$ である。

以後、 $a = \boxed{\text{キ}}$ とし、解答には a を用いないものとする。

このとき $\triangle PQR$ の重心と外心との間の距離は $\boxed{\text{ク}}$ である。また $\triangle PQR$ の内接円の半径は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

線分 PQ 上で点 P 、 Q とは異なる点を $D(t, t)$ とする。また、線分 PR 上で点 P 、 R とは異なる点を $E(u, -u + 2)$ とする。 $\triangle PQR$ の面積が $\triangle PDE$ の面積の2倍であるとき、 u は t を用いて $u = \boxed{\text{コ}}$ と表される。このとき線分 DE の長さの2乗を t の関数 $f(t)$ とおく。 $f(t)$ が最小となるとき t の値は $\boxed{\text{サ}}$ であり、 $f(t)$ の最小値は $\boxed{\text{シ}}$ である。

IV 連続な関数 $f(x)$ は、2 を周期とする周期関数とする。すなわち、すべての x に対して $f(x+2) = f(x)$ が成り立つ。

ここで $-1 \leq x \leq 1$ において $f(x) = |2x|$ とする。

[1] $f(-2) = \boxed{\text{ア}}$, $f(2) = \boxed{\text{イ}}$, $f(3) = \boxed{\text{ウ}}$, $f(4) = \boxed{\text{エ}}$

であり、 $-2 \leq x \leq 4$ において、 $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{オ}}$ である。ただし、 $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{オ}}$ は数値で答えよ。

[2] $\int xe^{-x} dx = \boxed{\text{カ}} + C$ (C は積分定数) である。必要ならばこの不定積分を活用して、以下の問いに答えよ。

(a) $\int_{-1}^1 e^{-x} f(x) dx = \boxed{\text{キ}}$ である。

(b) $1 \leq x \leq 2$ において、 $f(x)$ は絶対値を用いずに $f(x) = \boxed{\text{ク}}$ と表されるので

$$\int_0^2 e^{-x} f(x) dx = 2 \left(\boxed{\text{ケ}} \right)^2$$

である。

(c) 整数 k に対して

$$\int_{2k}^{2k+2} e^{-x} f(x) dx = \boxed{\text{コ}} \times 2 \left(\boxed{\text{ケ}} \right)^2$$

である。

(d) n を自然数とすると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2n} ne^{-nx} f(nx) dx$ を考える。

$$\int_0^{2n} ne^{-nx} f(nx) dx \text{ は、} t = nx \text{ と置換し、(c) の結果を用いると、}$$

等比数列の和で表される。

$$\text{したがって、} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2n} ne^{-nx} f(nx) dx = \boxed{\text{サ}} \text{ である。}$$

