

I

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ		
	2	0	0	0	3	3		
(2)	キ	ク	ケ	コ				
	4	1	4	4				
(3)	サ							
	8							
(4)	シ	ス						
	$\frac{3}{2}m$	$\frac{3m+1}{2}$						

【解説】

$a_{n+1}=0$ のとき、一般に

$$a_{n+2}=|a_{n+1}-a_n|=a_n$$

$$a_{n+3}=|a_{n+2}-a_{n+1}|=a_n$$

$$a_{n+4}=|a_{n+3}-a_{n+2}|=0$$

が成立するから、 $\{a_k\}$ は $n+2 \leq k$ の範囲で $a_n, a_n, 0, \dots$ と循環することがわかる。

[1]

$a_1=2, a_2=3$ のとき、

$$a_3=|a_2-a_1|=1$$

$$a_4=|a_3-a_2|=2$$

$$a_5=|a_4-a_3|=1$$

$$a_6=|a_5-a_4|=2$$

$$a_7=|a_6-a_5|=1$$

となる。以下の項は $1, 1, 0, \dots$ と循環するから、 $8 \leq k$ について、 k を 3 で割った余りが 1 のときは $a_k=0$ 、それ以外の場合は $a_k=1$ となるから、 $a_{16}=0$ である。また、 $a_1=3, a_2=6$ のとき、

$$a_3=|a_2-a_1|=3$$

$$a_4=|a_3-a_2|=3$$

$$a_5=|a_4-a_3|=0$$

となる。以下の項は $3, 3, 0, \dots$ と循環するから、 $6 \leq k$ について、 k を 3 で割った余りが 2 のときは $a_k=0$ 、それ以外の場合は $a_k=3$ となるから、 $a_{16}=3, a_{100}=3$ である。

[2]

$a_1=3, a_2=2$ のとき、

$$a_3=|a_2-a_1|=1$$

$$a_4=|a_3-a_2|=1$$

$$a_5=|a_4-a_3|=0$$

となるから、 $n=4$ であり、 $a_n=1$ である。また、 $a_1=4, a_2=8$ のとき、

$$a_3=|a_2-a_1|=4$$

$$a_4=|a_3-a_2|=4$$

$$a_5=|a_4-a_3|=0$$

となるから、 $n=4$ であり、 $a_n=4$ である。

[3]

a_1, a_2 の最大公約数を G とすると、 $a_3=|a_2-a_1|$ も G の倍数となり、以下帰納的に考えることで、すべての自然数 k について a_k は G の倍数となることがわかる。したがって、 $G>1$ のときは、 $a_n \neq 1$ であるから、 $a_n=1$ となるためには、 $G=1$ が必要である。逆に、 $G=1$ であるとき、 $0 < a_2 < a_1=15$ を満たすような a_2 の候補は、 $1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$ の 8 個であり、いずれも $a_n=1$ となる。

[4]

$a_1=m, a_2=1$ のとき、

$$\{a_n\} = m, 1, m-1, m-2, \\ 1, m-3, m-4, \dots$$

となるから、 m が偶数のとき、すなわち M を自然数として $m=2M$ と表せるとき、

$$n = (3M+1)-1 \\ = 3M \\ = \frac{3}{2}m$$

である。また、 m が奇数のとき、すなわち M を自然数として $m=2M-1$ と表せるとき、

$$n = (3M+1)-2 \\ = 3M-1 \\ = \frac{3(m+1)}{2}-1 \\ = \frac{3m+1}{2}$$

である。

II

〔解答〕

〔1〕	ア	イ		
	$\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$	$2xe^{2x}$		
〔2〕	ウ	エ		
	$-\frac{4}{3}x^3$	$-\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$		
〔3〕	オ	カ		
	0	$-h(x)$		
〔4〕	キ	ク	ケ	コ
	$x \sin(2x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	-2

〔解説〕

〔1〕

$f(x) = e^x$ のとき,

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-x}^x e^{t-x} \cdot e^{t+x} dt \\ &= \int_{-x}^x e^{2t} dt \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_{-x}^x \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{-2x} \end{aligned}$$

である。また, $f(x) = e^{-x}$ のとき,

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-x}^x e^{-t+x} \cdot e^{t+x} dt \\ &= e^{2x} \int_{-x}^x dt \\ &= 2xe^{2x} \end{aligned}$$

である。

〔2〕

$g(x) = x$ のとき,

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-x}^x (t-x)(t+x) dt \\ &= \int_{-x}^x (t^2 - x^2) dt \\ &= \left[\frac{1}{3} t^3 - x^2 t \right]_{-x}^x \\ &= -\frac{4}{3} x^3 \end{aligned}$$

となる。また, $h(x) = x^3 - x^2$ となるとき, 条件から実数 a, b ($a \neq 0$) を用いて $g(x) = ax + b$ とおくことができる。このとき,

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 &= \int_{-x}^x (t-x) \{a(t+x) + b\} dt \\ &= a \int_{-x}^x (t-x)(t+x) dt + b \int_{-x}^x (t-x) dt \\ &= a \cdot \left(-\frac{4}{3} x^3 \right) + b \left[\frac{1}{2} t^2 - xt \right]_{-x}^x \\ &= -\frac{4}{3} ax^3 - 2bx^2 \end{aligned}$$

$$\therefore x^3 - x^2 = -\frac{4}{3} ax^3 - 2bx^2$$

となり, この式がすべての実数 x について成り立つから,

$$\begin{cases} -\frac{4}{3}a = 1 \\ -2b = -1 \end{cases}$$

$$\therefore a = -\frac{3}{4}, b = \frac{1}{2}$$

となる。よって, $g(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ である。

〔3〕

$x=0$ のとき $h(x)$ の積分範囲が $0 \rightarrow 0$ となるから, $h(0)=0$ である。また, $u=-t$ と置換すること,

$$\begin{aligned} h(-x) &= \int_x^{-x} f(t+x)g(t-x)dt \\ &= \int_{-x}^x f(-u+x)g(-u-x) \cdot (-1)du \\ &= \int_{-x}^x f(u-x)g(u+x) \cdot (-1)du \\ &= -h(x) \end{aligned}$$

である。

〔4〕

積和の公式より $\cos(t-x)\sin(t+x) = \frac{1}{2}\{\sin(2t) + \sin(2x)\}$ であるから,

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-x}^x \cos(t-x)\sin(t+x)dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-x}^x \{\sin(2t) + \sin(2x)\} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos(2t) + t \sin(2x) \right]_{-x}^x \\ &= x \sin(2x) \end{aligned}$$

である。また, $x > 0$ のとき $h(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = 0$ であるから, $h(x) = 0$ を満たす最小の x は

$x = \frac{\pi}{2}$ である。このとき,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(2x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left\{ -\frac{1}{2} \cos(2x) \right\}' dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} x \cos(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos(2x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} x \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

である。また, $h'(x) = \sin(2x) + 2x \cos(2x)$ である。 $\cos(2x) = 0$ と仮定すると, $\sin(2x) = \pm 1$ より $h'(x) = \pm 1$ となるから, $h'(x) = 0$ ならば $\cos(2x) \neq 0$ である。よって, $x > 0$ の範囲で $h'(x) = 0$ が成り立つとき,

$$\begin{aligned} \sin 2x + 2x \cos(2x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\sin(2x)}{x \cos(2x)} + 2 &= 0 \quad (\because x \cos(2x) \neq 0) \\ \Leftrightarrow \frac{\tan(2x)}{x} &= -2 \end{aligned}$$

である。

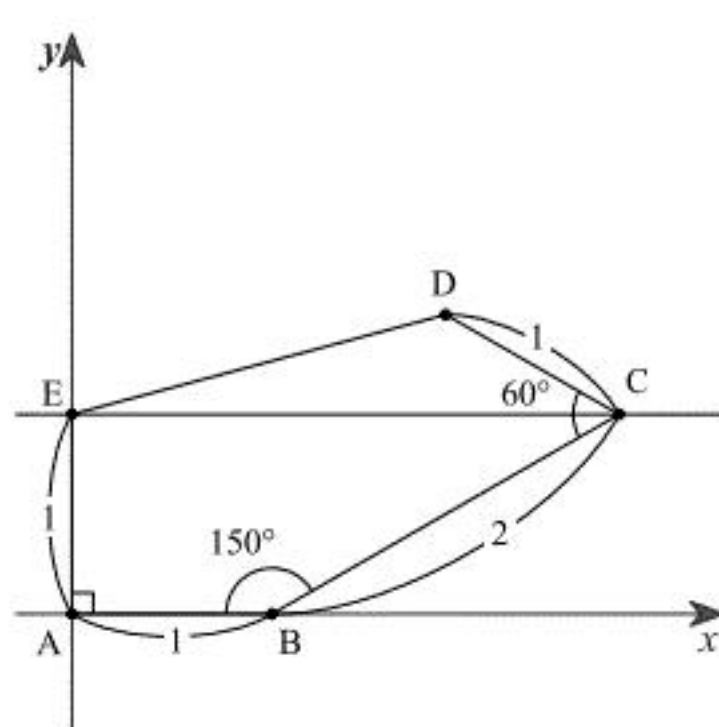
Ⅲ

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ
$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5+3\sqrt{3}}{4}$	$(1+\sqrt{3})\vec{x}+\vec{y}$	$\frac{2+\sqrt{3}}{2}\vec{x}+\frac{3}{2}\vec{y}$
カ	キ	ク	ケ	
$\frac{2+\sqrt{3}}{3}\vec{x}+\vec{y}$	$\frac{1+2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2+\sqrt{3}}{3}$	$\frac{22+\sqrt{3}}{225}$	

〔解説〕

$AB=AE=1$, $\angle EAB=90^\circ$ であることから、座標平面上に点 $A(0, 0)$, 点 $B(1, 0)$, 点 $E(0, 1)$ と置いて一般性を失わない。



このとき、 $\angle ABC=150^\circ$, $BC=2$ より、点 C の座標は $(1+2\cos 30^\circ, 2\sin 30^\circ)$, すなわち

$C(1+\sqrt{3}, 1)$ と求められる。また、直線 $y=1$ は x 軸と平行であり、錯角の関係から

$\angle BCE=30^\circ$ とわかる。 $\angle BCD=60^\circ$ であるから $\angle ECD=30^\circ$ であり、点 D の座標は

$(1+\sqrt{3}+\cos 150^\circ, 1+\sin 150^\circ)$, すなわち $D\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ と求められる。よって、 DE の長さは、

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}&=\sqrt{2+\sqrt{3}}\\&=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}\\&=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\&=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

と求められる。また、 $CD=1$, $CE=1+\sqrt{3}$ であることから、 $\triangle CDE$ の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot (1+\sqrt{3})\cdot \sin 30^\circ=\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

となる。五角形 $ABCDE$ の面積は $\triangle CDE$ の面積と台形 $ABCE$ の面積の和で表されることから

$$\frac{1+\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\cdot (1+1+\sqrt{3})\cdot 1=\frac{5+3\sqrt{3}}{4}$$

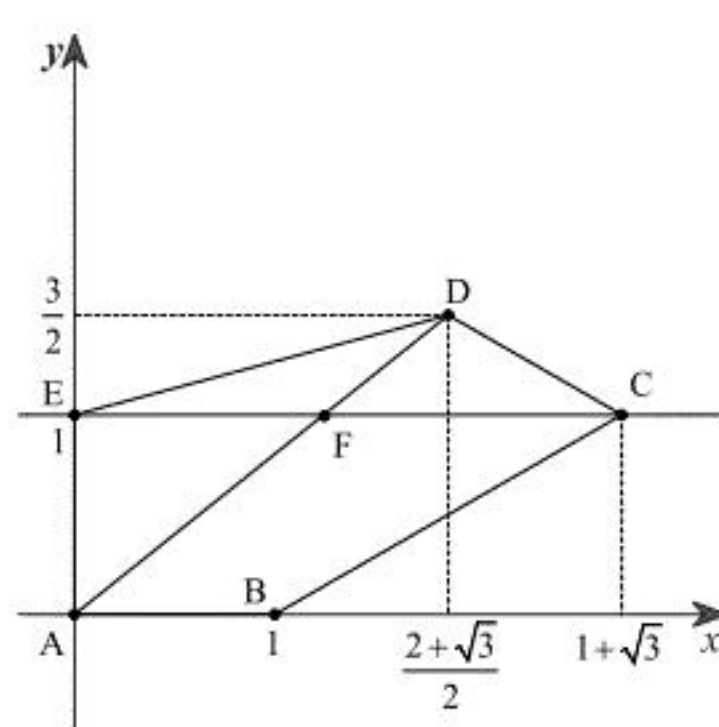
と求められる。 $\vec{x}=(1, 0)$, $\vec{y}=(0, 1)$ であり、点 C の座標は $(1+\sqrt{3}, 1)$ であることから、

$$\overrightarrow{AC}=(1+\sqrt{3})\vec{x}+\vec{y}$$

と書け、点 D の座標は $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ であることから

$$\overrightarrow{AD}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}\vec{x}+\frac{3}{2}\vec{y}$$

と書ける。



また、上図より AD と EC の交点 F は y 座標が 1 であることから、実数 k を用いて $\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AD}$ とおくと、

$$\frac{3}{2}k=1$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{2}{3}$$

と求められる。このことから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF}&=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\\&=\frac{2+\sqrt{3}}{3}\vec{x}+\vec{y}\end{aligned}$$

となる。よって、点 F の座標は $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ であり、 FC の長さは

$$(1+\sqrt{3})-\frac{2+\sqrt{3}}{3}=\frac{1+2\sqrt{3}}{3}$$

とわかる。したがって、四角形 $ABCF$ は台形であり、その面積は

$$\frac{1}{2}\cdot \left(1+\frac{1+2\sqrt{3}}{3}\right)\cdot 1=\frac{2+\sqrt{3}}{3}$$

と求められる。さらに、 $\overrightarrow{FO}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FO}&=\frac{1}{5}(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE})\\&=\frac{1}{5}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{FE}-3\overrightarrow{AF})\\&=\frac{1}{5}\left(1+\frac{1+2\sqrt{3}}{3}+\frac{2+\sqrt{3}}{2}-\frac{2+\sqrt{3}}{3}-2-\sqrt{3}, \frac{3}{2}-3\right)\\&=\left(-\frac{2+\sqrt{3}}{30}, -\frac{3}{10}\right)\end{aligned}$$

となることから

$$\begin{aligned}FO^2&=\frac{7+4\sqrt{3}}{900}+\frac{9}{100}\\&=\frac{22+\sqrt{3}}{225}\end{aligned}$$

である。

IV

【解答】

(1)	$\boxed{\text{ア}}$	$\boxed{\text{イ}}$		
	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	1		
(2)	$\boxed{\text{ウ}}$	$\boxed{\text{エ}}$	$\boxed{\text{オ}}$	$\boxed{\text{カ}}$
	$5a$	$5a^2 - 4$	$15a$	$45a^2 - 4$
(3)	$\boxed{\text{キ}}$	$\boxed{\text{ク}}$	$\boxed{\text{ケ}}$	
	3	7	$\frac{9 - 4\sqrt{5}}{8}$	

【解説】

[1]

ℓ と C が接するための条件は、 $y=x-a$ と $x^2-5y^2=1$ から y を消去して得られる x の 2 次方程式

$$\begin{aligned}x^2-5(x-a)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2-5(x^2-2ax+a^2) &= 1 \\ \Leftrightarrow 4x^2-10ax+5a^2+1 &= 0\end{aligned}$$

が重解を持つことである。したがって、この方程式の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-5a)^2-4(5a^2+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 5a^2 &= 4 \\ \therefore a &= \frac{2\sqrt{5}}{5} (\because a > 0)\end{aligned}$$

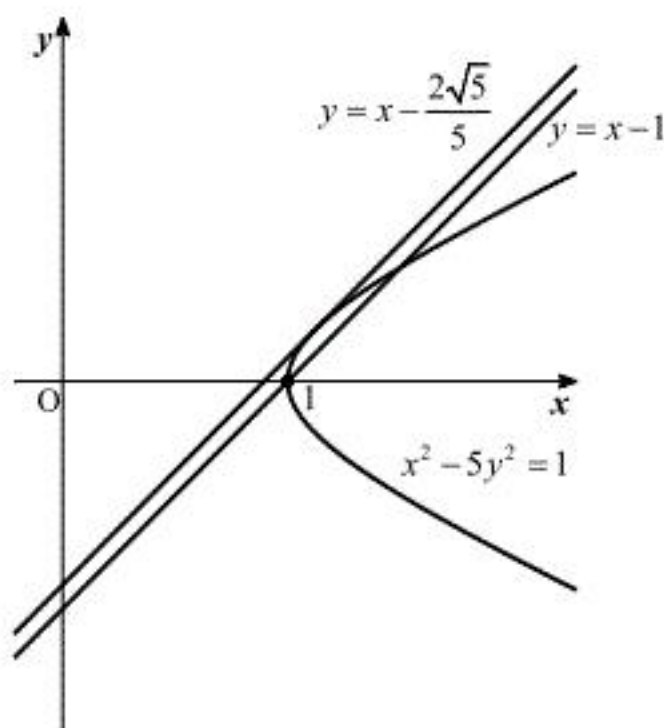
のときに ℓ と C が接する。また、

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &> 0 \\ \therefore a &> \frac{2\sqrt{5}}{5} (\because a > 0)\end{aligned}$$

のときに ℓ と C が相異なる 2 点で交わるが、下図より 2 点の y 座標がともに正となるのは、

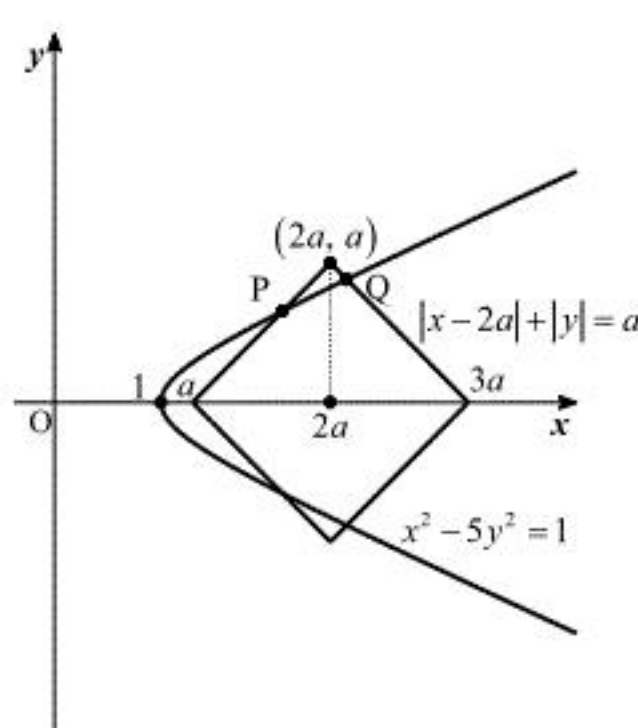
$$\frac{2\sqrt{5}}{5} < a < 1$$

のときである。



[2]

$|x-2a|+|y|=a$ を xy 平面上に図示すると、4 点 $(a, 0), (3a, 0), (2a, a), (2a, -a)$ を頂点とする、1 辺の長さが $\sqrt{2}a$ である正方形となる。



したがって、点 P は C と ℓ の交点のうち x 座標が大きい方の点であり、点 Q は C と $y=-x+3a$ の交点のうち x 座標が小さい方の点である。[1] より、

$$\begin{aligned}4x^2-10ax+5a^2+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5a \pm \sqrt{5a^2-4}}{4}\end{aligned}$$

であるから、 P の座標は、

$$P\left(\frac{5a+\sqrt{5a^2-4}}{4}, \frac{a+\sqrt{5a^2-4}}{4}\right)$$

である。また、点 Q の x 座標は、 $y=-x+3a$ と $x^2-5y^2=1$ から y を消去して得られる x の 2 次方程式

$$\begin{aligned}x^2-5(-x+3a)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2-5(x^2-6ax+9a^2) &= 1 \\ \Leftrightarrow 4x^2-30ax+45a^2+1 &= 0\end{aligned}$$

の解のうち、小さい方であるから、

$$\begin{aligned}4x^2-30ax+45a^2+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{15a-\sqrt{45a^2-4}}{4}\end{aligned}$$

より、 Q の座標は、

$$Q\left(\frac{15a-\sqrt{45a^2-4}}{4}, \frac{-3a+\sqrt{45a^2-4}}{4}\right)$$

である。

[3]

領域 D は [2] の図の正方形の内部および周上であるから、 $R(2a, a)$ であり、領域 D の面積は $2a^2$ である。また、

$$\begin{aligned}\overline{PR} &= \left(\frac{3a-\sqrt{5a^2-4}}{4}, \frac{3a-\sqrt{5a^2-4}}{4}\right) \\ \overline{QR} &= \left(\frac{-7a+\sqrt{45a^2-4}}{4}, \frac{7a-\sqrt{45a^2-4}}{4}\right)\end{aligned}$$

であるから、 $\alpha = \frac{3a-\sqrt{5a^2-4}}{4}$ 、 $\beta = \frac{7a-\sqrt{45a^2-4}}{4}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\Delta PQR &= \frac{1}{2}|\alpha\beta - a(-\beta)| \\ &= \alpha\beta \\ &= \frac{(3a-\sqrt{5a^2-4})(7a-\sqrt{45a^2-4})}{16}\end{aligned}$$

である。したがって、

$$f(a) = \frac{1}{32}\left(3-\frac{\sqrt{5a^2-4}}{a}\right)\left(7-\frac{\sqrt{45a^2-4}}{a}\right)$$

である。このとき、

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow \infty} f(a) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{32}\left(3-\sqrt{5-\frac{4}{a^2}}\right)\left(7-\sqrt{45-\frac{4}{a^2}}\right) \\ &= \frac{1}{32}(3-\sqrt{5})(7-3\sqrt{5}) \\ &= \frac{36-16\sqrt{5}}{32} \\ &= \frac{9-4\sqrt{5}}{8}\end{aligned}$$

である。