（第３時限：100分）

2025年度　②

数　学　問　題

（理　系）

（全４ページ）

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
3. 解答用紙１枚・下書用紙２枚は，この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後，問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数　学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の $\boxed{}$ にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ　△ABC は3辺の長さの和が6であり，BC の長さは AB の長さより1大きい。AB の長さを x とおくと，BC = $\boxed{\text{ア}}$ ，CA = $\boxed{\text{イ}}$ と表される。また，x が取りうる値の範囲は $\boxed{\text{ウ}} < x < \boxed{\text{エ}}$ である。AB・BC cos B を x の式で表すと， $\boxed{\text{オ}}$ となる。$\mathrm{AB}^2 \cdot \mathrm{BC}^2 \sin^2 \mathrm{B}$ を x の式で表すと $\boxed{\text{カ}}$ となる。ゆえに，△ABC の面積は x を用いて $\boxed{\text{キ}}$ と表すことができる。これが $\boxed{\text{ウ}} < x < \boxed{\text{エ}}$ において最大となるのは，x = $\boxed{\text{ク}}$ のときであり，そのときの△ABC の面積は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

Ⅱ　実数全体で定義された関数 $f(x) = e^x - x - 20$ について，$f(x) = 0$ を満たす x で最大のものを p とおく。ただし，e は自然対数の底であり，不等式

$$2.718 < e < 2.719$$

を満たす。

〔1〕 $f(x)$ は $x =$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{イ}}$ をとり，方程式 $f(x) = 0$ の解の個数は $\boxed{\text{ウ}}$ 個である。また，$f(x) < 0$ を満たす整数 x の中で最小のものは $\boxed{\text{エ}}$ である。

〔2〕 n を自然数とする。n が不等式 $\dfrac{n}{10} < e < \dfrac{n+1}{10}$ を満たすならば，$n =$ $\boxed{\text{オ}}$ である。また，n が不等式 $\dfrac{n}{4} < e < \dfrac{n+1}{4}$ を満たすならば $n =$ $\boxed{\text{カ}}$ である。

〔3〕 1より大きい定数 a に対して，実数全体で定義された関数 $g(x) = a^x - x - 20$ は $x =$ $\boxed{\text{キ}}$ のとき最小となる。また，$g(x) = 0$ を満たす x で最大のものを q とするとき，$q < p$ が成り立つための必要十分条件は，a が不等式 $\boxed{\text{ク}}$ を満たすことである。

〔4〕 $f(x) < 0$ を満たす x で整数であるものは合計 $\boxed{\text{ケ}}$ 個存在する。

（注）解答欄に対数を使用する場合，自然対数 $\log\ (= \log_e)$ を用いること。

Ⅲ　有理数からなる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ が次の式を満たす。

$$(2 + \sqrt{5})^n = a_n + \sqrt{5}b_n$$

〔1〕 $a_1 = \boxed{\text{ア}}$, $b_1 = \boxed{\text{イ}}$ である。a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表すと,

$$a_{n+1} = \boxed{\text{ウ}}\, a_n + \boxed{\text{エ}}\, b_n, \quad b_{n+1} = a_n + \boxed{\text{オ}}\, b_n$$

となる。ただし, $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オ}}$ は有理数である。

〔2〕 $c_n = a_n + \sqrt{5}b_n$, $d_n = a_n - \sqrt{5}b_n$ とおくと, $c_{n+1} = \boxed{\text{カ}}\, c_n$, $d_{n+1} = \boxed{\text{キ}}\, d_n$ であり, また, $c_n d_n$ を n を用いて表すと $c_n d_n = \boxed{\text{ク}}$ である。a_n, b_n の一般項は

$$a_n = \frac{\left(\boxed{\text{ケ}}\right)^n + \left(\boxed{\text{コ}}\right)^n}{2}, \quad b_n = \frac{\left(\boxed{\text{ケ}}\right)^n - \left(\boxed{\text{コ}}\right)^n}{2\sqrt{5}}$$

であることがわかる。ただし, $\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{コ}}$ は定数である。

〔3〕 自然数 n に対して, $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sqrt{5}\sum_{k=1}^{n} b_k$ とおくと,

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \boxed{\text{サ}} + \boxed{\text{シ}}\sqrt{5}$$

である。ただし, $\boxed{\text{サ}}$, $\boxed{\text{シ}}$ は有理数である。

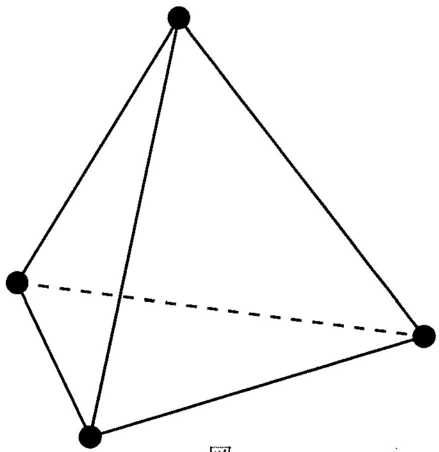
Ⅳ　多面体の２つの頂点が，１つの辺の両端であるとき，その２つの頂点は隣接していると定義する。

以下，多面体の頂点から頂点に移動する動点について考える。頂点にある動点は，その頂点に隣接する頂点のいずれか１つに同じ確率で移動する。n を０以上の整数とする。

〔１〕　図のような正四面体の，ある１つの頂点について，それと隣接する頂点は $\boxed{\text{ア}}$ 個ある。正四面体のある１つの頂点から出発した動点を考える。動点が３回移動した後に出発した頂点にある確率は $\boxed{\text{イ}}$ である。動点が n 回移動した後に，出発した頂点にある事象を A_n とする。ただし，A_0 は全事象とする。このとき，$n \geqq 1$ について条件付き確率は

$$P_{A_{n-1}}(A_n) = \boxed{\text{ウ}}\ ,\quad P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n) = \boxed{\text{エ}}$$

である。$P(A_0) = 1$ より，$P(A_n)$ を n の式で表すと，$P(A_n) = \boxed{\text{オ}}$ である。



図

〔２〕　正八面体のある１つの頂点について，それと隣接する頂点は $\boxed{\text{カ}}$ 個ある。正八面体のある１つの頂点から出発した動点を考える。動点が n 回移動した後に，出発した頂点と隣接した頂点にある事象を B_n とする。ただし，B_0 は空事象とする。このとき，$P_{B_{n-1}}(\overline{B_n}) = \boxed{\text{キ}}$ である。$P(B_0) = 0$ より，動点が n 回移動した後に出発した頂点にある確率を n の式で表すと $\boxed{\text{ク}}$ である。