

(第3時限：100分)

2025年度 ②

数 学 問 題

(全6ページ)

理系型3教科方式 薬 学 方 式

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
3. 解答用紙1枚・下書き用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書き用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次の I, II, III, N の設問について、問題文の にあてはまる適當なものを解答用紙の所定の欄に記入しなさい。ただし、近似値を記入してはいけません。分数を記入する際は、既約分数を記入しなさい。また、根号を含む分数を記入する際は、分母を有理化した分数を記入しなさい。

I

[1] 座標平面において、次の連立不等式の表す領域 D に含まれる格子点 (x 座標, y 座標がともに整数である点) の個数を考える。ただし、 n は自然数とする。

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 3^n \\ 0 \leq y \leq \log_3 x \end{cases}$$

直線 $y = k$ (k は整数) が領域 D と共通部分をもつとき、 k の値の範囲は ア である。

直線 $y = k$ と曲線 $y = \log_3 x$ との交点の座標は $(\boxed{\text{イ}}, k)$ である。

したがって、領域 D に含まれる直線 $y = k$ 上の格子点の個数は、 n と k を用いて ウ と表される。

よって、領域 D に含まれる格子点の個数は、 n を用いると

$$(\boxed{\text{エ}}) 3^n + \boxed{\text{オ}}$$

となる。

[2] $0 \leq x < 2\pi$, $0 \leq y < 2\pi$ のとき, 次の連立方程式の解を求める。

$$\begin{cases} \cos x = 1 - \sin y \\ \sin x = \sqrt{3} + \cos y \end{cases} \quad \dots\dots(1) \quad \dots\dots(2)$$

①, ②より x を消去すると

$$\sin y - \boxed{\text{カ}} \times \cos y = \boxed{\text{キ}} \quad \dots\dots(3)$$

となる。ただし, $\boxed{\text{キ}}$ は定数である。

③は次のように変形できる。

$$\sin(y - \boxed{\text{ク}}) = \boxed{\text{ケ}}$$

ただし, $-\frac{\pi}{2} \leq \boxed{\text{ク}} \leq \frac{\pi}{2}$ であり, $\boxed{\text{ケ}}$ は定数である。

$0 \leq y < 2\pi$ より, $y = \boxed{\text{コ}}$ である。

$y = \boxed{\text{コ}}$ を①, ②に代入して, $0 \leq x < 2\pi$ を満たす x の値を求める

$$x = \boxed{\text{サ}}$$

が得られる。

[3] 700点満点の試験をしたところ, 受験者10人の得点 x は次の通りであった。

620, 615, 595, 605, 590, 625, 585, 580, 600, 605

得点 x の平均値は, $\boxed{\text{シ}}$ である。

ここで, 得点 x の仮平均を 600 として

$$u = \frac{x - 600}{5}$$

とすると, 変量 u の標準偏差は $\boxed{\text{ス}}$ である。

したがって, 得点 x の標準偏差は $\boxed{\text{セ}}$ である。

II p, q を $p \geq 0 > q$ を満たす定数とし、関数 $f(x) = x^4 + 4px^3 + 2qx^2$ を考える。

(1) 関数 $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とし、方程式 $f'(x) = 0$ の異なる 3 個の実数解を $0, \alpha, \beta$ とする。さらに $\alpha > \beta$ とすると、 α は、 p, q を用いて

$$\alpha = \frac{\boxed{\text{ア}} + \sqrt{\boxed{\text{イ}} - \boxed{\text{ウ}}}}{2}$$

と表される。

(2) 関数 $f(x)$ が $x = -2, 2$ で極値をとるとする。

このとき、 $p = \boxed{\text{エ}}$, $q = \boxed{\text{オ}}$ であり、 $-3 \leq x \leq 3$ における関数 $f(x)$ の最大値は $\boxed{\text{カ}}$ 、最小値は $\boxed{\text{キ}}$ である。

この関数 $y = f(x)$ のグラフを、直線 $y = \boxed{\text{キ}}$ に関して対称に折り返したグラフを関数 $y = g(x)$ のグラフとすれば

$$g(x) = \boxed{\text{ク}} \times x^4 + \boxed{\text{ケ}} \times x^2 - \boxed{\text{コ}}$$

である。

さらに、関数 $y = f(x)$ のグラフと関数 $y = g(x)$ のグラフで囲まれた図形の面積 S は

$$S = \boxed{\text{サ}}$$

である。

III 座標空間に存在する4点A, B, C, Dを頂点とする正四面体ABCDにおいて、
 $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CAD$, $\triangle ABD$ の重心をそれぞれP, Q, R, Sとする。正四面
 体ABCDの一辺の長さはaであり、 $A\left(0, \frac{\sqrt{3}a}{2}, 0\right)$, $B\left(\frac{-a}{2}, 0, 0\right)$,
 $C\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$ とする。また、点Dのz座標を正とする。

[1] $AP = BP = CP =$ ア , $\triangle BCP$ の面積は イ である。

ただし、 ア , イ についてはaを用いて答えよ。

[2] 点Dの座標は ウ , 点Pの座標は エ , 点Qの座標は オ ,

点Rの座標は カ , 点Sの座標は キ である。

したがって、 $AQ = BR = CS = DP =$ ク , $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} =$ ケ

である。

ただし、 ウ から ク までについてはaを用いて答えよ。

[3] 4本の線分AQ, BR, CS, DPは1点で交わり、その交点を正四面体ABCD
 の重心という。正四面体ABCDの重心をGとすると、実数x, yを用いて \overrightarrow{SG}
 を次のように表すことができる。

$$\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{SD} + x \overrightarrow{DP} = y \overrightarrow{SC}$$

このとき、 $x =$ コ , $y =$ サ である。

[4] \overrightarrow{GA} と \overrightarrow{GB} のなす角をθとすると、 $\cos \theta =$ シ である。

IV n を 2 以上の整数とする。図 1 のように、同じ大きさの立方体の箱を横に 2 個並べ、手前から奥に向かって合計 $2n$ 個並べた直方体がある。なお、図 1 は $n = 3$ のときの直方体を真上から見たときのものである。

一番手前にある 2 個の箱を除くすべての箱に 1 枚ずつ硬貨を投げ入れる。硬貨を投げ入れたとき表裏が出る確率は、それぞれ $\frac{1}{2}$ である。

ここで、次の事象 A , B を考え、事象 A が起こる場合の数を a_n 、事象 A が起こる確率を P_n とする。

A : お互いに側面が接しており、かつ硬貨が入っている 2 個の箱の中を見ると、少なくとも 1 枚は裏が出ている

B : 表が出ている硬貨の枚数と裏が出ている硬貨の枚数が等しい

図 2 は $n = 6$ のときの積事象 $A \cap B$ の例を示している。

[1] $n = 2$ の場合、箱の総数は 4 であるが、硬貨を投げ入れる箱の数は 2 である。したがって、

$$a_2 = \boxed{\text{ア}}, P_2 = \boxed{\text{イ}} \text{ である。}$$

$$n = 3 \text{ の場合}, a_3 = \boxed{\text{ウ}}, P_3 = \boxed{\text{エ}} \text{ である。}$$

$$n = 4 \text{ の場合}, P_4 = \boxed{\text{オ}} \text{ である。}$$

[2] $n \geq 4$ のとき、次の漸化式が成り立つ。

$$a_n = \boxed{\text{カ}} \times a_{n-1} + \boxed{\text{キ}} \times a_{n-2}$$

$$n = 6 \text{ の場合}, P_6 = \boxed{\text{ク}} \text{ である。}$$

$n = 6$ の場合、事象 A が起きたことがわかっているとき、事象 B が起こる確率は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

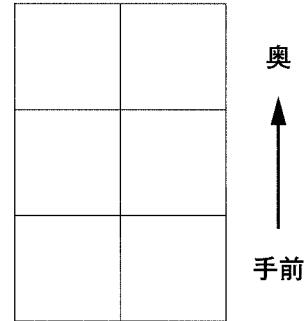


図 1

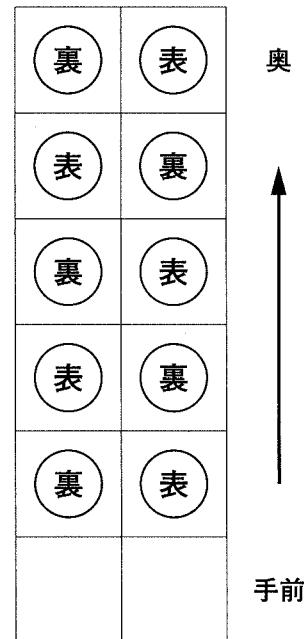


図 2

[3] α, β を実数として、[2] の漸化式を次のように変形する。

$$a_n - \alpha a_{n-1} = \beta (a_{n-1} - \alpha a_{n-2})$$

この式を満たす α, β の組は 2 組あり

$$(\alpha, \beta) = (\boxed{\text{コ}}, \boxed{\text{サ}}) \text{ または } (\alpha, \beta) = (\boxed{\text{サ}}, \boxed{\text{コ}})$$

である。ただし、 $\boxed{\text{コ}} < \boxed{\text{サ}}$ とする。

α, β の組が 2 組あるので、二つの漸化式が得られる。これらの漸化式から数列 $\{a_n\}$ の一般項を計算して、 P_n を求めると

$$P_n = \boxed{\text{シ}}$$

となる。

