（第２時限：100分）

2025年度　⑤

数　学　問　題

（理　　　系）

（全４ページ）

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
3. 解答用紙１枚・下書用紙２枚は，この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後，問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数　学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の $\boxed{}$ にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ　a, b を実数の定数とする。

〔1〕　3次式 $f(x) = x^3 - ax - b$ を $x - 1$ で割った商は $\boxed{\text{ア}}$ であり，余りは $\boxed{\text{イ}}$ である。よって，$a = \boxed{\text{ウ}}$ のとき，$f(x)$ は $x - 1$ で割り切れる。$f(x)$ を $x^2 - 1$ で割った商は $\boxed{\text{エ}}$ で，余りは $\boxed{\text{オ}}$ である。よって，$a = \boxed{\text{カ}}$，$b = \boxed{\text{キ}}$ のとき，$f(x)$ は $x^2 - 1$ で割り切れる。

〔2〕　4次式 $g(x) = x^4 - ax - b$ を $x - 1$ で割ったときの商は $\boxed{\text{ク}}$，余りは $\boxed{\text{ケ}}$ である。$g(x)$ を $x^2 - 1$ で割ったときの商は $\boxed{\text{コ}}$，余りは $\boxed{\text{サ}}$ である。

〔3〕　3以上の自然数 n に対して，n 次式 $h(x)$ を $h(x) = x^n - ax - b$ で定める。$h(x)$ を $x - 1$ で割ったときの余りは $\boxed{\text{シ}}$ である。また，n が偶数のとき $h(x)$ を $x^2 - 1$ で割ったときの余りは $\boxed{\text{ス}}$ であり，n が奇数のとき $h(x)$ を $x^2 - 1$ で割ったときの余りは $\boxed{\text{セ}}$ である。n を3で割った余りが2のとき，$h(x)$ を $x^3 - 1$ で割ったときの余りは $\boxed{\text{ソ}}$ である。

Ⅱ

〔1〕 区間 $[0,\ \pi]$ で関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$$

このとき，$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\cos x}{\boxed{\text{ア}}}$ であり，$f(\pi-x)-f(x)=\boxed{\text{イ}}$ である。ただし，$\boxed{\text{ア}}$ は $\sin x$ の整式である。

また，$g(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)f(\pi-x)$ とおくと，$g(x)=\frac{2\sin(2x)}{\boxed{\text{ウ}}}$ と表せる。

さらに，$g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-g(x)=\boxed{\text{エ}}$ である。ただし，$\boxed{\text{ウ}}$ は $\cos(2x)$ の整式である。

〔2〕 a，b は実数の定数とする。実数全体で定義された関数 $h(x)$ が $h(a+b-x)=h(x)$ を満たすとする。このとき，$a+b-x=t$ とおき，置換積分法を用いると，

$$\int_a^b xh(x)\,dx=\boxed{\text{オ}}\int_a^b h(x)\,dx$$

が成り立つ。

〔3〕

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx=\boxed{\text{カ}}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx=\boxed{\text{キ}}$$

である。また，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x\cos x}{(1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)}\,dx=\boxed{\text{ク}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{(1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)}\,dx$$

$$=\boxed{\text{ケ}}$$

である。

Ⅲ　Nを3以上の自然数とし，pを $0 \leqq p \leqq 1$ を満たす実数とする。くじをN回引くことを考える。ただし，当たりの出る確率は次の通りである。

- 1回目にくじを引くときは確率pで当たりが出る。
- 2回目以後にくじを引くときは

（a）　直前に引いたくじが当たりであれば確率$\frac{1}{2}$で当たりが出る。

（b）　直前に引いたくじが当たりでなければ確率$\frac{1}{10}$で当たりが出る。

〔1〕　2回目に引いたくじが当たりである確率は $\boxed{\text{ア}}$ である。

〔2〕　1回目に当たりが出る条件の下で，3回目に引いたくじが当たりである確率は $\boxed{\text{イ}}$ である。

〔3〕　nを2以上N以下の自然数とする。最初からn回連続で当たりが出る確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である。また，n回目に引いたくじで初めて当たりが出る確率は $\boxed{\text{エ}}$ である。

〔4〕　nをN未満の自然数とする。n回目に引いたくじが当たりである確率をq_nとすると，漸化式

$$q_{n+1} = \boxed{\text{オ}} + \boxed{\text{カ}}\, q_n$$

が成り立ち，一般項は

$$q_n = \boxed{\text{キ}} + \boxed{\text{ク}}\, p$$

と表せる。$\left(\boxed{\text{オ}} \sim \boxed{\text{ク}} \text{ は } q_n,\ p \text{ を含まない。} \right)$

〔5〕　当たりが出る確率がどの回でも同じであるのは，$p = \boxed{\text{ケ}}$ のときである。

Ⅳ　空間内のある平面上に，一直線上にない3点A，B，Cがあり，△ABCは一辺の長さ1の正三角形であるとする。A，B，Cを含む平面上にない点Oから，△ABCの重心Gに向かうベクトル$\overrightarrow{OG}$をベクトル$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$によって表すと，
$\overrightarrow{OG} = \boxed{\text{ア}}\,\overrightarrow{OA} + \boxed{\text{イ}}\,\overrightarrow{OB} + \boxed{\text{ウ}}\,\overrightarrow{OC}$ となる。線分BCの中点Mについて，$\overrightarrow{AM} = \boxed{\text{エ}}\,\overrightarrow{GM}$ である。

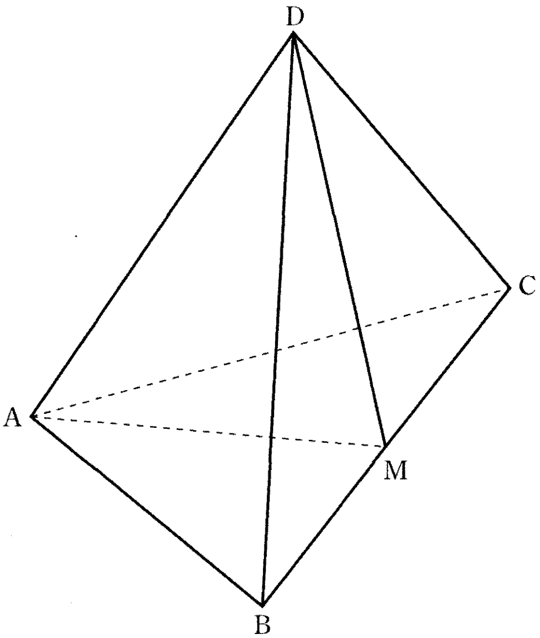
以後，ベクトル$\overrightarrow{OG}$がA，B，Cを含む平面に直交しているとする。

$|\overrightarrow{OG}| = r\ (>0)$ とおくと，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OG} = \boxed{\text{オ}}$ であり，線分OMの長さは $\boxed{\text{カ}}$ である。

点Oを中心とする半径rの球面をSとする。球面Sが三角錐ABCDに内接するように点Dを定める。ただし，正の数pを用いて

$$\overrightarrow{OD} = -\frac{p}{r}\overrightarrow{OG}$$

と表されるとする。球面Sと△BCDの接点をEとすると，線分OEの長さは $\boxed{\text{キ}}$ で，線分EMの長さは $\boxed{\text{ク}}$ である。pをrを用いて表すと，
$p = \boxed{\text{ケ}}$ である。$\left(\boxed{\text{キ}} \sim \boxed{\text{ケ}}\ \text{は}\ p\ \text{を含まない。}\right)$



図

(Mab⑤)