（第２時限：100分）

2025年度　⑥

数　学　問　題

（理　　系）

（全６ページ）

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
3. 解答用紙１枚・下書用紙２枚は，この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後，問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数　学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の $\boxed{}$ にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。なお，分数を記入する際は，既約分数を記入しなさい。

Ⅰ　1以上の整数 n に対し，$f(n) = n(n+3)$ と定める。

〔1〕 $f(5)$ の正の約数の個数は $\boxed{ア}$ 個である。

〔2〕 $f(n)$ は常に偶数であることは，以下のように証明できる。ただし $\boxed{イ}$ と $\boxed{ウ}$ には，「奇数」もしくは「偶数」のどちらかで答えよ。

$f(n) = n(n+3)$ において，n が偶数の場合，$n+3$ は $\boxed{イ}$ であり，積 $n(n+3)$ は偶数である。n が奇数の場合，$n+3$ は $\boxed{ウ}$ であり，積 $n(n+3)$ はやはり偶数である。したがって，1以上のすべての整数 n において，$f(n)$ は常に偶数である。

〔3〕 $f(n)$ を異なる素数 p，q を用いて $f(n) = p^k q^m$（k，m は $1 \leqq k \leqq m$ を満たす整数）と表す。このとき $f(n)$ の正の約数の個数が6個となる n を求める。

条件より，$(k+1)(m+1) = \boxed{エ}$ と表せる。これより，

$$k = \boxed{オ}, \quad m = \boxed{カ}$$

となる。

また，$f(n)$ は常に偶数であるため，p または q は2である。

$p = 2$ のとき，n の値は $\boxed{キ}$ である。

$q = 2$ のとき，n の値は $\boxed{ク}$ である。

Ⅱ　a は3ではない実数とする。方程式 $x^2+y^2-2ax+6a-9=0$ で表される円 C_1 を考える。

〔1〕 $a=5$ のとき，円 C_1 の中心の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$，半径は $\boxed{\text{ウ}}$ となる。

〔2〕 円 C_1 は実数 a が3以外のどのような値を取っても定点 $\left(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}}\right)$ を通る。

〔3〕 $a=2$ の場合を考える。

点A(1，3)，点B(3，3)，円 C_1 上の点をP$(s,\ t)$とする。△ABPの重心Gの座標を$(X,\ Y)$としたとき，X，Y は s，t を用いて $X=\boxed{\text{カ}}$，$Y=\boxed{\text{キ}}$ と表される。したがって s，t は X，Y を用いて $s=\boxed{\text{ク}}$，$t=\boxed{\text{ケ}}$ と表される。点Pが円 C_1 上を動くとき，点Gは，中心の座標が $\left(\boxed{\text{コ}},\ \boxed{\text{サ}}\right)$，半径が $\boxed{\text{シ}}$ の円上にある。

次に方程式 $x^2+(y-b)^2=r^2\ (b>0,\ r>1)$ で表される円 C_2 を考える。円 C_1 と円 C_2 の中心間の距離を d とする。円 C_1 と円 C_2 が異なる2点で交わるための必要十分条件は，$\boxed{\text{ス}}<d<\boxed{\text{セ}}$ である。また，円 C_1 と円 C_2 が第1象限で接するとき，$b=\boxed{\text{ソ}}$ となる。ただし，$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{ソ}}$ は r を用いて答えよ。

Ⅲ　座標平面上に動点Pがあり，時刻tにおける座標$(x(t),\ y(t))$が次のようにtの関数

$$x(t)=2\cos t+\cos 2t,\qquad y(t)=\sin 2t\qquad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

を用いて表されている。

〔1〕　動点Pの速さの最大値，最小値について考える。

時刻$t\ (0<t<\pi)$における，動点Pの速度ベクトル$\vec{v}$を成分表示すると，tを用いて，

$$\vec{v}=\left(-2\left(\boxed{\text{ア}}\right),\ 2\left(\boxed{\text{イ}}\right)\right)$$

となる。

したがって，動点Pの時刻tにおける速さ$|\vec{v}|$は，

$$|\vec{v}|=2\sqrt{f(t)},\qquad f(t)=\sin^2 t+2\sin\left(\boxed{\text{ウ}}\right)\sin t+1$$

である。ただし，$0<\boxed{\text{ウ}}<2\pi$ とする。

$f'(t)$は変形すると

$$f'(t)=2\left(\boxed{\text{エ}}\cos t+2\right)\left(\boxed{\text{オ}}\cos t-1\right)\sin t$$

となる。ただし$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$は数値で答えよ。

したがって$|\vec{v}|$は $t=\boxed{\text{カ}}$ のとき最大値$\boxed{\text{キ}}$，$t=\varphi$ $\left(\text{ただし } 0<\varphi<\pi \text{ かつ } \cos\varphi=\boxed{\text{ク}}\right)$のとき最小値$\boxed{\text{ケ}}$をとる。

〔2〕　時刻 $t=0$ から $t=\dfrac{\pi}{2}$ まで動点Pが動くときの軌跡を曲線Cとする。このとき，x軸と曲線Cとの交点のx座標の値は，$\boxed{\text{コ}}$と$\boxed{\text{サ}}$であり，曲線Cとx軸とで囲まれる図形の面積Sは，$S=\boxed{\text{シ}}$である。ただし$\boxed{\text{コ}}<\boxed{\text{サ}}$とする。

（このページは空白）

Ⅳ　i を虚数単位とする。特に指示がない限り，実数の数値で答えよ。

t を実数，α，β，γ，w，z を複素数とする。また，$\alpha = 2\sqrt{3} + 2i$，$z = \cos t + i \sin t$ とし，複素数平面上の点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を原点を中心に π 回転させた点を $\mathrm{B}(\beta)$ とする。

〔1〕 $|\alpha| = \boxed{\text{ア}}$，$\arg \alpha = \boxed{\text{イ}}$ である $\left(ただし，0 \leqq \boxed{\text{イ}} < 2\pi\right)$。

〔2〕 γ に関する方程式 $\gamma^4 = \alpha$ の解は $\boxed{\text{ウ}}$ 個あり，そのうち実部の値が最も大きい解を γ_0 とすると，$|\gamma_0| = \boxed{\text{エ}}$，$\arg \gamma_0 = \boxed{\text{オ}}$ である $\left(ただし，0 \leqq \boxed{\text{オ}} < 2\pi\right)$。

〔3〕 点 $W(w)$ は，2 点 A，B とは異なる点とする。半直線 AB から半直線 AW までの回転角 θ は，α，β，w を用いて $\theta = \arg\left(\boxed{\text{カ}}\right)$ と表される。

以下，3 点 A，B，W は同一直線上にあるとする。このとき，$\boxed{\text{カ}}$ は実数であることから，

$$\left(\boxed{\text{キ}} + i\right)w + \left(\boxed{\text{ク}} + i\right)\overline{w} = 0 \qquad \cdots\cdots①$$

が成り立つ。

さらに，3 点 $Z(z)$，A，B は同一直線上にはないとする。直線 ZW と直線 AB が垂直に交わるとき，

$$\overline{w} = \left(\boxed{\text{ケ}} + \boxed{\text{コ}}\,i\right)(z - w) + \overline{z}$$

が成り立つ。これを式①に代入して整理すると，

$$w = \frac{1}{2}\left\{\left(\cos\left(\boxed{\text{サ}}\right) + i\sin\left(\boxed{\text{サ}}\right)\right)\overline{z} + z\right\}$$

となる。ただし，$0 \leqq \boxed{\text{サ}} < 2\pi$ とする。したがって，$|w|$ は t を用いて

$$|w| = \left|\sin\left(\boxed{\text{シ}}\right)\right| \qquad \cdots\cdots②$$

と表される。

なお，3 点 Z，A，B が同一直線上にあるとき，点 W は点 Z と同一の点とすれば，同様に式②が成り立つ。

ここで，t を $0 \leqq t < 2\pi$ の範囲で変化させたとき，線分 WA の長さ $|\mathrm{WA}|$ は $t = \boxed{\text{ス}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{セ}}$，$t = \boxed{\text{ソ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{タ}}$ をとる。