

前期日程

平成 11 年度入学試験問題（前期日程）

数 学

（理 工 学 部）

—— 解 答 上 の 注 意 事 項 ——

- 1 「解答始め」の合図があるまで問題を見てはならない。
- 2 「解答始め」の合図があったら、初めにすべての解答紙の所定欄に受験番号を記入せよ。
受験番号は算用数字で横書きとする。
- 3 問題冊子 1 冊と解答紙冊子 1 冊（解答紙 4 枚および計算紙 1 枚）がある。
- 4 問題は

1

 から

4

 まで 4 問ある。各問の解答は所定の解答紙に記入せよ。
- 5 解答しない問題がある場合でも、解答紙 4 枚すべてを提出すること。

1

以下の問いに答えよ。

- (1) $a = \tan \frac{\alpha}{2}$, $b = \tan \frac{\beta}{2}$ のとき, $\tan \frac{\alpha + \beta}{2}$ を a , b で表せ。
- (2) $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$, $0^\circ \leq \beta < 90^\circ$ のとき, 以下の不等式を証明せよ。

また, 等号が成立する場合を調べよ。

(i)
$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{2} \geq \tan \frac{\alpha + \beta}{2}$$

(ii)
$$\frac{3 \tan \alpha + \tan \beta}{4} \geq \tan \frac{3\alpha + \beta}{4}$$

2

空間の異なる 3 点を A, B, O とする。点 A を通り $\vec{0}$ でない方向ベクトル $\vec{u}$ の直線 ℓ と、 ℓ 上にない点 B を通り $\vec{0}$ でない方向ベクトル $\vec{v}$ の直線 m がある。
 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおくとき、以下の問いに答えよ。

- (1) ℓ 上の点 X の位置ベクトルを $\overrightarrow{OX} = \vec{a} + s\vec{u}$ と表したとき、ベクトル $\overrightarrow{BX}$ の長さ $|\overrightarrow{BX}|$ を与えられたベクトルと s で表せ。
- (2) X が ℓ 上を動くとき、 $|\overrightarrow{BX}|$ の最小値と、最小値を与える点 X_0 の位置ベクトル $\overrightarrow{OX_0}$ を与えられたベクトルで表せ。
- (3) m 上の点 Y の位置ベクトルを $\overrightarrow{OY} = \vec{b} + t\vec{v}$ とおく。 X が ℓ 上を、 Y が m 上を動くとき、 $|\overrightarrow{XY}|$ が最小となるような位置ベクトル $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ を求めよ。

3

複素数 z に対して $w = \frac{z-i}{z+i}$ とおくとき、以下の問いに答えよ。ただし、 i は虚数単位とする。

- (1) $z = x + iy$, $w = u + iv$ とおくとき、 u と v を x , y の関数として表せ。
- (2) z が複素数平面の原点を中心とした半径 1 の円周上(ただし $z = -i$ を除く)を動くとき、 w の描く図形を求めよ。
- (3) z が複素数平面内の実軸上を動くとき、 w はどのような図形を描くか。

4

二等辺三角形 ABC の底辺 BC の長さを a , $\angle B = \angle C = \theta$, $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする。二等辺三角形 ABC に内接する正方形 $B_1B'_1C'_1C_1$ を, 辺 $B'_1C'_1$ は辺 BC 上に, B_1 は辺 AB 上に, C_1 は辺 AC 上にあるようにとる。次に, 二等辺三角形 AB_1C_1 に内接する正方形を同様に作図して $B_2B'_2C'_2C_2$ とする。以下同様にしてこの作図を順次繰り返し, 正方形の列 $\{B_nB'_nC'_nC_n\}$ を作る。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 正方形 $B_nB'_nC'_nC_n$ の面積 S_n を求めよ。

(2) $S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めよ。

(3) S が二等辺三角形 ABC の面積の $\frac{1}{2}$ となるとき, 二等辺三角形 ABC はどのようなになるか。