

1

次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ の外接円の半径を R , $\angle BAC$ を A とするとき, $\frac{BC}{\sin A} = 2R$ が成立する。このことを (i) $A = \frac{\pi}{2}$ の場合, (ii) $A < \frac{\pi}{2}$ の場合, (iii) $A > \frac{\pi}{2}$ の場合についてそれぞれ証明せよ。
- (2) $AC = b$, $\angle ABC = \theta$, $\angle ACB = 3\theta$ の $\triangle ABC$ の辺 BC またはその延長上に $\angle CAP = p\theta$ ($p > 0$) となるように点 P をとる。線分 CP の長さ l を b , p , θ を用いて表せ。
- (3) (2) で求めた l の極限值 $\lim_{\theta \rightarrow 0} l$ を求めよ。

2 xy 平面上に 4 つの点 $E(1, 1)$, $F(4, 1)$, $G(4, 4)$, $H(1, 4)$ をとる。

また, $m > 0$ とし, $y = m^2 x^2$ で定まる放物線を C とする。次の問いに答えよ。

- (1) C と四角形 $EFGH$ が交わるときの m の範囲を求めよ。
- (2) C が四角形 $EFGH$ を 2 つに分割するとき, C よりも右側にある部分の面積を S とする。 S を m の関数として表せ。
- (3) C が四角形 $EFGH$ の面積を 2 等分するときの m の値を求めよ。

3 $0 \leq \alpha, \beta \leq \frac{\pi}{2}$ である実数 α, β に対し、複素数 $z_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ を

$$z_n = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n + (\cos \beta + i \sin \beta)^n$$

で定める。次の問いに答えよ。

- (1) $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{4}$ のとき、 z_1, z_2, z_3, z_4 を複素数平面上に図示せよ。
- (2) $z_6 = -2$ となる α, β の組をすべて求めよ。
- (3) $\alpha = 2\beta$ のとき、 $z_6 = 0$ となる α をすべて求めよ。

4 xy 平面において、 y 軸上の点 $A(0, a)$ と曲線 $y = \log x$ 上の点 $X(x, \log x)$ を考える。ただし、対数は自然対数である。

(1) 線分 AX の長さが最短になる点 B はただ 1 つ存在し、線分 AB は点 B における曲線 $y = \log x$ の接線 l と直交することを、以下の手順で証明せよ。

(i) 定数 a に対して、 $x^2 + \log x - a = 0$ を満たす x はただ 1 つ存在することを示せ。

(ii) b を、 $b^2 + \log b - a = 0$ を満たす実数とする。線分 AX の長さが最短になる点は、 $B(b, \log b)$ のみであることを示せ。

(iii) 線分 AB は、 $B(b, \log b)$ における曲線 $y = \log x$ の接線 l と直交することを示せ。

(2) $B(b, \log b)$ を、(1)で導いた点とする。線分 AB の長さが、 $AB = \sqrt{6}$ となるときの a の値を求めよ。