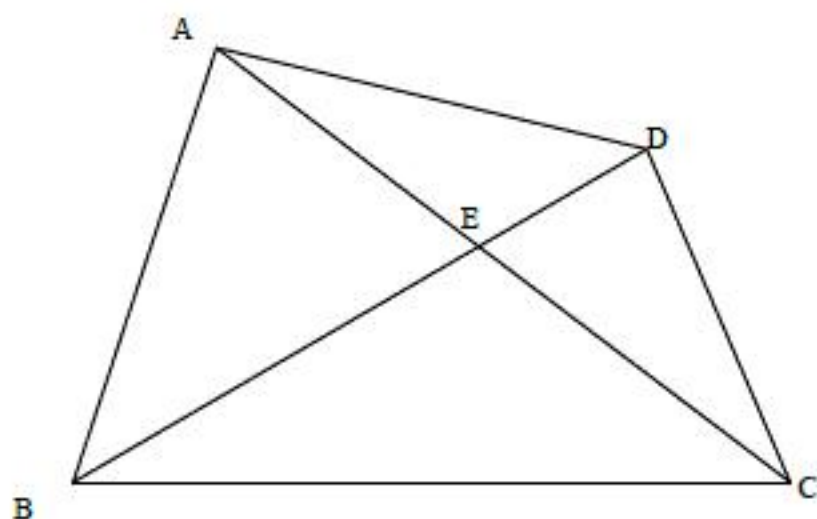


(1)



図のように点 A, B, C, D, E を設定し, $AE = \ell_1, EC = \ell_2, BE = m_1, ED = m_2$ とおくと, 四角形の面積は

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \ell_1 m_1 \sin \theta + \frac{1}{2} \ell_2 m_1 \sin (\pi - \theta) + \frac{1}{2} \ell_2 m_2 \sin \theta + \frac{1}{2} \ell_1 m_2 \sin (\pi - \theta) \\
 &= \frac{1}{2} \ell_1 m_1 \sin \theta + \frac{1}{2} \ell_2 m_1 \sin \theta + \frac{1}{2} \ell_2 m_2 \sin \theta + \frac{1}{2} \ell_1 m_2 \sin \theta \\
 &= \frac{1}{2} (\ell_1 + \ell_2) (m_1 + m_2) \sin \theta \\
 &= \frac{1}{2} \ell m \sin \theta
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} \ell m \sin \theta$$

(2)

(1)において $\ell + m = k$ とすれば, 四角形の面積は

$$\frac{1}{2} \ell (k - \ell) \sin \theta = \frac{1}{2} \left\{ - \left(\ell - \frac{1}{2} k \right)^2 + \frac{1}{4} k^2 \right\} \sin \theta$$

となり, $\ell = \frac{1}{2} k, \sin \theta = 1$ のとき面積は最大値 $\frac{1}{8} k^2$ を取る。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{8} k^2$$

(1)

真である。二つの有理数 p, q は、整数 a, b, c, d を用いて $p = \frac{b}{a}, q = \frac{d}{c}$ と表される。このとき

$$\begin{aligned} p + q &= \frac{b}{a} + \frac{d}{c} \\ &= \frac{bc + da}{ac} \end{aligned}$$

となり、 p, q の和は分母分子ともに整数である分数として表されるので、有理数である。

(答) 真

(2)

偽である。ある無理数 r について、 $-r$ は無理数である。なぜなら $-r$ が有理数であると仮定すると、ある整数 a, b を用いて $-r = \frac{b}{a}$ と表される。これを变形して

$$r = \frac{-b}{a}$$

となるが、左辺は無理数、右辺は有理数であり成り立たない。よって $-r$ は無理数である。ここで

$$r + (-r) = 0$$

となるから、二つの無理数 $r, -r$ の和は有理数となり命題の反例となる。

(答) 偽

(3)

偽である。まず $\sqrt{2}$ が無理数であることを背理法によって証明する。 $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると、ある二つの互いに素な整数 a, b を用いて $\sqrt{2} = \frac{b}{a}$ と表すことができる。この式の両辺を二乗して整理すると

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{b^2}{a^2} \\ \Leftrightarrow 2a^2 &= b^2 \end{aligned}$$

となる。これより b は偶数であるので、整数 b' を用いて $b = 2b'$ と表すことができ、これを上式に代入して整理すると

$$\begin{aligned} 2a^2 &= (2b')^2 \\ \Leftrightarrow a^2 &= 2b'^2 \end{aligned}$$

となり、 a は偶数であることがわかる。よって a, b はともに偶数であるが、これは a, b が互いに素であるということに矛盾する。よって $\sqrt{2}$ は無理数である。ここで

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$

であり、右辺は有理数となるから、無理数と無理数の積は無理数であるという命題は偽である。

(答) 偽

(4)

偽である。(3)より $\sqrt{2}$ は無理数である。ここで $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数である時、命題は成り立たない。

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が無理数である時、

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}} &= \sqrt{2}^{(\sqrt{2} \times \sqrt{2})} \\ &= \sqrt{2}^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

となるから、命題は成り立たない。よって命題は偽である。

(答) 偽

(1)

$$a_3 - a_2 = a_2 - a_1$$

$$\Leftrightarrow (3a_2 + 2p + q) - 2a_2 + a_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_2 + a_1 + 2p + q = 0$$

$$\Leftrightarrow (3a_1 + p + q) + a_1 + 2p + q = 0$$

$$\Leftrightarrow 4a_1 + 3p + 2q = 0$$

$$\therefore a_1 = -\frac{3p + 2q}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_1 = -\frac{3p + 2q}{4}$$

(2)

(1)の関係がなりたつとき、

$$a_2 - a_1 = 2a_1 + p + q$$

$$= 2 \times \left(-\frac{3p + 2q}{4} \right) + p + q$$

$$= -\frac{p}{2}$$

となる。ここで $a_{n+1} - a_n = -\frac{p}{2}$ のとき

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n) + p$$

$$= -\frac{3}{2}p + p$$

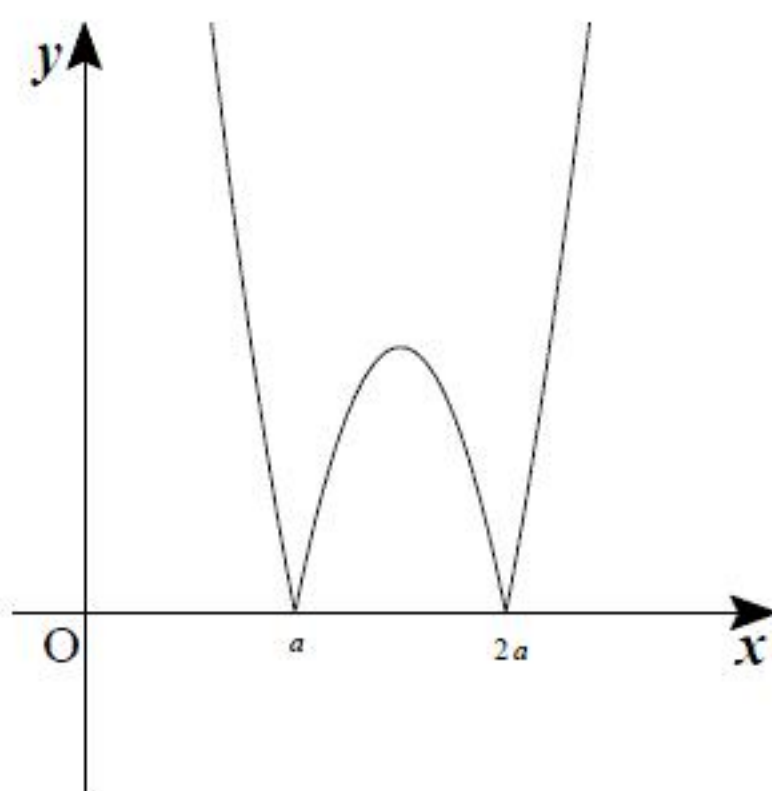
$$= -\frac{p}{2}$$

$$= a_{n+1} - a_n$$

となるから、 a_n は公差 $-\frac{p}{2}$ の等差数列であることが示された。

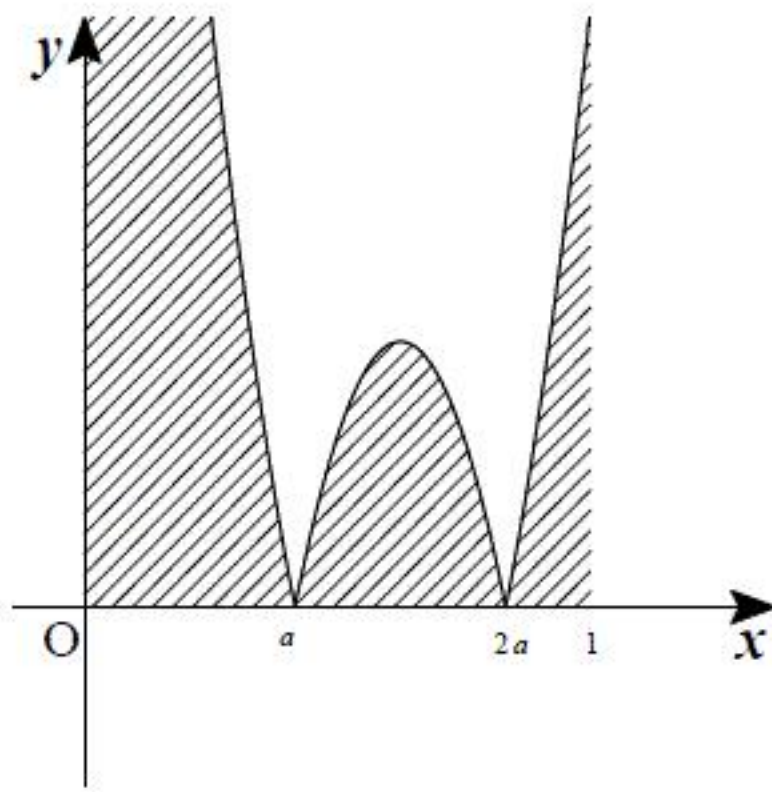
(証明終)

4



$y = |(x-a)(x-2a)|$ のグラフは上のようになる。 a の値によって場合分けをし、 $I(a)$ を求める。

[1] $0 < 2a < 1 \Leftrightarrow 0 < a < \frac{1}{2}$ のとき

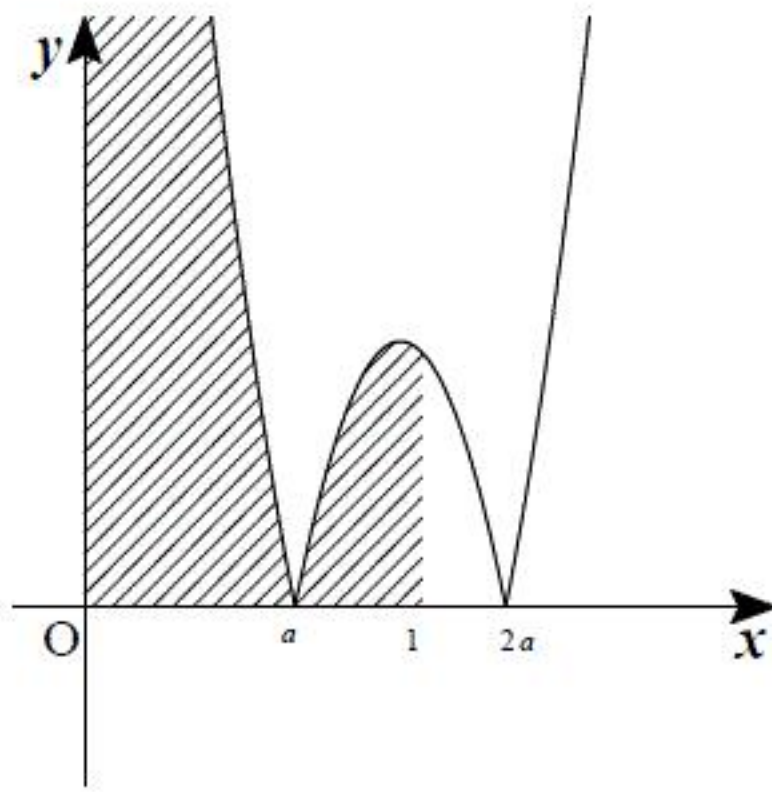


上図より

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^1 |(x-a)(x-2a)| dx \\ &= \int_0^a (x-a)(x-2a) dx - \int_a^{2a} (x-a)(x-2a) dx + \int_{2a}^1 (x-a)(x-2a) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-a)^3 - \frac{a}{2}(x-a)^2 \right]_0^a + \frac{a^3}{6} + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}ax^2 + 2a^2x \right]_{2a}^1 \\ &= \frac{5}{6}a^3 + \frac{a^3}{6} + 2a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}a^3 \\ &= \frac{a^3}{3} + 2a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

[2] $a \leq 1 \leq 2a \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq a \leq 1$ のとき

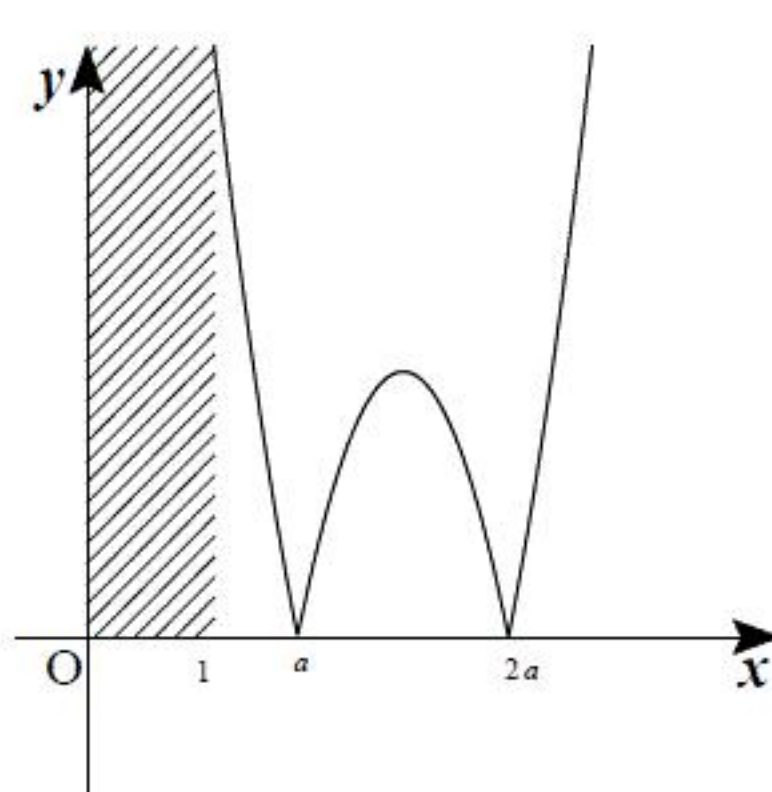


上図より

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^1 |(x-a)(x-2a)| dx \\ &= \int_0^a (x-a)(x-2a) dx - \int_a^1 (x-a)(x-2a) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-a)^3 - \frac{a}{2}(x-a)^2 \right]_0^a - \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}ax^2 + 2a^2x \right]_a^1 \\ &= \frac{5}{3}a^3 - 2a^2 + \frac{3}{2}a - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

[3] $a > 1$ のとき



上図より

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^1 |(x-a)(x-2a)| dx \\ &= \int_0^1 (x-a)(x-2a) dx \\ &= 2a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

以上[1]～[3]より

$$I(a) = \begin{cases} \frac{a^3}{3} + 2a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{1}{3} & \left(0 < a < \frac{1}{2} \right) \\ \frac{5}{3}a^3 - 2a^2 + \frac{3}{2}a - \frac{1}{3} & \left(\frac{1}{2} \leq a \leq 1 \right) \\ 2a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{1}{3} & (a > 1) \end{cases}$$

となり、

$$I'(a) = \begin{cases} a^2 + 4a - \frac{3}{2} & \left(0 < a < \frac{1}{2} \right) \\ 5a^2 - 4a + \frac{3}{2} & \left(\frac{1}{2} \leq a \leq 1 \right) \\ 4a - \frac{3}{2} & (a > 1) \end{cases}$$

となるから、 $I(a)$ の増減は下のようになる。

a	0	...	$\frac{-4+\sqrt{22}}{2}$	...
$I'(a)$	$\swarrow$	-	0	+
$I(a)$	$\swarrow$	$\searrow$		$\nearrow$

よって $I(a)$ は $a = \frac{-4+\sqrt{22}}{2}$ のとき最小値をとる。

(答) $a = \frac{-4+\sqrt{22}}{2}$