

(1)

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OI} &= (1-t)\overrightarrow{OE} + t\overrightarrow{OM} \\
 &= (1-t)(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{d}) + t \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} \\
 &= (1-t)\overrightarrow{a} + (1-t)\overrightarrow{d} + \frac{t}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}) + \frac{t}{2}\overrightarrow{c} \\
 &= \left(1 - \frac{t}{2}\right)\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{c} + (1-t)\overrightarrow{d}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OI} = \left(1 - \frac{t}{2}\right)\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{c} + (1-t)\overrightarrow{d}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OJ} &= (1-s)\overrightarrow{OL} + s\overrightarrow{ON} \\
 &= (1-s)\frac{\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{OB}}{4} + s\frac{\overrightarrow{d} + \overrightarrow{OG}}{2} \\
 &= \frac{(1-s)}{4}\overrightarrow{a} + \frac{3}{4}(1-s)(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}) + \frac{s}{2}\overrightarrow{d} + \frac{s}{2}(\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}) \\
 &= (1-s)\overrightarrow{a} + \frac{(3-s)}{4}\overrightarrow{c} + s\overrightarrow{d}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OJ} = (1-s)\overrightarrow{a} + \frac{(3-s)}{4}\overrightarrow{c} + s\overrightarrow{d}$$

(3)

(1), (2)において点I, Jが一致するような t, s が存在することを示せばよい。 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ が一次独立であることに注意すると

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OI} &= \overrightarrow{OJ} \\
 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{t}{2}\right)\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{c} + (1-t)\overrightarrow{d} &= (1-s)\overrightarrow{a} + \frac{(3-s)}{4}\overrightarrow{c} + s\overrightarrow{d} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{t}{2} = 1 - s \\ t = \frac{3-s}{4} \\ 1-t = s \end{cases} \\
 \Leftrightarrow (s, t) &= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)
 \end{aligned}$$

となり、 $(s, t) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ のときI, Jが一致するので、線分EM, LNが交わることが示された。ま

た、Hはこのときの点I, Jと同一の点であるから、 $EH:HM = \frac{2}{3}:\frac{1}{3} = 2:1$ である。

$$(\text{答}) \quad EH:HM = 2:1$$

2

(1)

$$\begin{aligned}\alpha - \beta &= 90^\circ - \alpha \\ \Leftrightarrow \beta &= 2\alpha - 90^\circ\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}\tan \beta &= \tan (2\alpha - 90^\circ) \\ &= -\frac{1}{\tan 2\alpha} \\ &= -\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \\ &= \frac{\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)} \\ &= \frac{\tan^2 \alpha - 1}{2 \tan \alpha}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \tan \beta = \frac{\tan^2 \alpha - 1}{2 \tan \alpha}$$

(2)

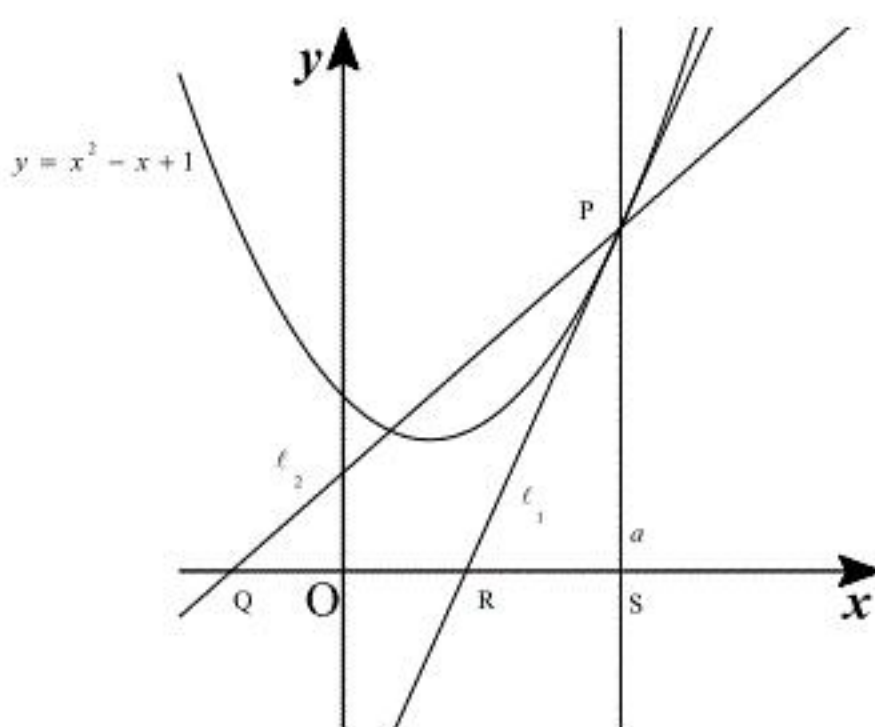
$f'(x) = 2x - 1$ であるから、 ℓ_1 の傾きは $2a - 1$ であるので

$$\tan \alpha = 2a - 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \tan \alpha = 2a - 1$$

(3)



図のように点 P, Q, R, S をおく。 $\angle PRS = \alpha$ であり、 ℓ_2 は ℓ_1 に関して直線 $x = a$ と対称であるから

$$\begin{aligned}\angle RPS &= \angle QPR \\ \Leftrightarrow \angle PRS - \angle PQR &= \angle PSR - \angle RPS \\ \Leftrightarrow \alpha - \angle PQR &= 90^\circ - \alpha \\ \therefore \angle PQR &= 2\alpha - 90^\circ\end{aligned}$$

となる。よって ℓ_2 の傾きは

$$\begin{aligned}\tan \angle PQR &= \tan (2\alpha - 90^\circ) \\ &= -\frac{1}{\tan 2\alpha} \\ &= \frac{\tan^2 \alpha - 1}{2 \tan \alpha} \\ &= \frac{(2a - 1)^2 - 1}{2(2a - 1)} \\ &= \frac{2a^2 - 2a}{2a - 1}\end{aligned}$$

となる。 ℓ_2 は点 $(a, f(a))$ を通るから、求める方程式は

$$\begin{aligned}y &= \frac{2a^2 - 2a}{2a - 1}(x - a) + f(a) \\ &= \frac{2a^2 - 2a}{2a - 1}x - \frac{2a^3 - 2a^2}{2a - 1} + a^2 - a + 1 \\ &= \frac{2a^2 - 2a}{2a - 1}x - \frac{a^2 - 3a + 1}{2a - 1}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{2a^2 - 2a}{2a - 1}x - \frac{a^2 - 3a + 1}{2a - 1}$$

(4)

(3)より

$$\begin{aligned}y &= \frac{2a^2 - 2a}{2a - 1}x - \frac{a^2 - 3a + 1}{2a - 1} \\ \Leftrightarrow 2ay - y &= (2x - 1)a^2 + (3 - 2x)a - 1 \\ \Leftrightarrow (2x - 1)a^2 - (2x + 2y - 3)a + y - 1 &= 0\end{aligned}$$

となるが、これが a の値によらず成り立つ (x, y) が存在するとき

$$\begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 2x + 2y - 3 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

となるから、これを解いて

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (x, y) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

(1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 8 \cdot 16^x - 3 \cdot 8^{x+1} + 14 \cdot 4^x + 3 \cdot 2^{x+2} - 9 \\
 &= 8 \cdot (2^x)^4 - 3 \cdot 8 \cdot (2^x)^3 + 14 \cdot (2^x)^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot 2^x - 9 \\
 &= 8t^4 - 24t^3 + 14t^2 + 12t - 9
 \end{aligned}$$

となるから、 $g(t) = 8t^4 - 24t^3 + 14t^2 + 12t - 9$ である。

$$(\text{答}) \quad g(t) = 8t^4 - 24t^3 + 14t^2 + 12t - 9$$

(2)

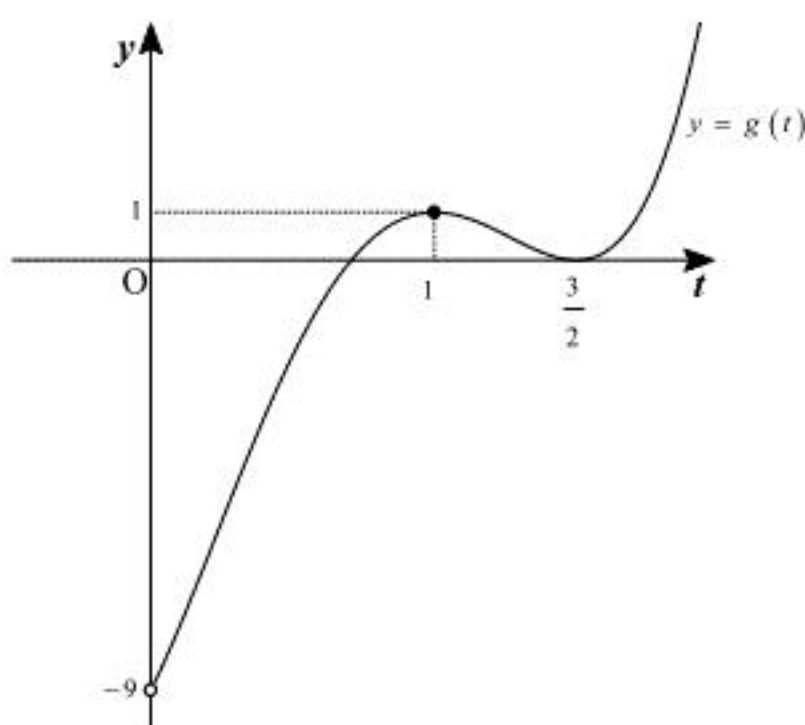
(1)より

$$\begin{aligned}
 g'(t) &= 32t^3 - 72t^2 + 28t + 12 \\
 &= 4(t-1)(2t-3)(4t+1)
 \end{aligned}$$

となるから、 $y = g(t) (t > 0)$ の増減表は下の通り。

t	0	...	1	...	$\frac{3}{2}$	...
$g'(t)$	$\nearrow$	+	0	-	0	+
$g(t)$	$\nearrow$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

よってグラフは $\lim_{t \rightarrow +0} g(t) = -9$ に注意して、下の通り。



(答) 上図

(3)

$g(t) = 0$ は $t = \frac{3}{2}$ で t 軸に接するから $(2t-3)^2$ を因数に持つことがわかる。ここから

$$g(t) = (2t-3)^2 (2t^2-1)$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}
 g(t) &> 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < t < \frac{3}{2}, \frac{3}{2} < t
 \end{aligned}$$

となり、 $t = 2^x$ は単調増加であるから

$$\begin{aligned}
 f(x) &> 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < 2^x < \frac{3}{2}, \frac{3}{2} < 2^x \\
 \Leftrightarrow \log \frac{\sqrt{2}}{2} < x < \log \frac{3}{2}, \log \frac{3}{2} < x \\
 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \log 2 < x < \log 3 - \log 2, \log 3 - \log 2 < x
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{1}{2} \log 2 < x < \log 3 - \log 2, \log 3 - \log 2 < x$$

(1)

$$\begin{aligned}
 f(2) - f(3) &= \frac{\log 2}{2} - \frac{\log 3}{3} \\
 &= \frac{1}{6}(3 \log 2 - 2 \log 3) \\
 &= \frac{1}{6}(\log 2^3 - \log 3^2) \\
 &= \frac{1}{6} \log \frac{8}{9} < 0
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow f(2) < f(3)$$

となる。同様にして

$$\begin{aligned}
 f(3) - f(4) &= \frac{\log 3}{3} - \frac{\log 4}{4} \\
 &= \frac{1}{12} \log \frac{3^4}{4^3} \\
 &= \frac{1}{12} \log \frac{81}{64}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow f(3) > f(4)$$

となる。また,

$$\begin{aligned}
 f(2) - f(4) &= \frac{\log 2}{2} - \frac{\log 4}{4} \\
 &= \frac{1}{4} \log \left(\frac{2^2}{4} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

となる。よって $f(2) = f(4) < f(3)$ となる。

(答) $f(2) = f(4) < f(3)$

(2)

$$f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

となるから、増減表は下の通り。

x	0	...	e	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘

よって極値は $f(e) = \frac{1}{e}$ である。

(答) 極値: $f(e) = \frac{1}{e}$

(3)

(1)より $y = \frac{\log 2}{2}$ と $y = f(x)$ の交点は $x = 2, 4$ である。よって $y = f(x)$ と $y = \frac{\log 2}{2}$ が囲む面積は

$$\begin{aligned}
 \int_2^4 \left(\frac{\log x}{x} - \frac{\log 2}{2} \right) dx &= \int_2^4 \log x (\log x)' dx - \left[\frac{\log 2}{2} x \right]_2^4 \\
 &= \left[\frac{1}{2} (\log x)^2 \right]_2^4 - \log 2 \\
 &= \frac{1}{2} (\log 4)^2 - \frac{1}{2} (\log 2)^2 - \log 2 \\
 &= \frac{3}{2} (\log 2)^2 - \log 2
 \end{aligned}$$

となる。よって題意は示された。

(証明終)