

(1)

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OI} &= (1-t)\overrightarrow{OE} + t\overrightarrow{OM} \\
 &= (1-t)(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{d}) + t \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} \\
 &= (1-t)\overrightarrow{a} + (1-t)\overrightarrow{d} + \frac{t}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}) + \frac{t}{2}\overrightarrow{c} \\
 &= \left(1 - \frac{t}{2}\right)\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{c} + (1-t)\overrightarrow{d}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OI} = \left(1 - \frac{t}{2}\right)\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{c} + (1-t)\overrightarrow{d}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OJ} &= (1-s)\overrightarrow{OL} + s\overrightarrow{ON} \\
 &= (1-s)\frac{\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{OB}}{4} + s\frac{\overrightarrow{d} + \overrightarrow{OG}}{2} \\
 &= \frac{(1-s)}{4}\overrightarrow{a} + \frac{3}{4}(1-s)(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}) + \frac{s}{2}\overrightarrow{d} + \frac{s}{2}(\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}) \\
 &= (1-s)\overrightarrow{a} + \frac{(3-s)}{4}\overrightarrow{c} + s\overrightarrow{d}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OJ} = (1-s)\overrightarrow{a} + \frac{(3-s)}{4}\overrightarrow{c} + s\overrightarrow{d}$$

(3)

(1), (2)において点I, Jが一致するような t, s が存在することを示せばよい。 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ が一次独立であることに注意すると

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OI} &= \overrightarrow{OJ} \\
 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{t}{2}\right)\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{c} + (1-t)\overrightarrow{d} &= (1-s)\overrightarrow{a} + \frac{(3-s)}{4}\overrightarrow{c} + s\overrightarrow{d} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{t}{2} = 1 - s \\ t = \frac{3-s}{4} \\ 1-t = s \end{cases} \\
 \Leftrightarrow (s, t) &= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)
 \end{aligned}$$

となり、 $(s, t) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ のときI, Jが一致するので、線分EM, LNが交わることが示された。ま

た、Hはこのときの点I, Jと同一の点であるから、 $EH:HM = \frac{2}{3}:\frac{1}{3} = 2:1$ である。

$$(\text{答}) \quad EH:HM = 2:1$$

2

(1)

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 90^\circ - \alpha \\ \Leftrightarrow \beta &= 2\alpha - 90^\circ\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}\tan \beta &= \tan (2\alpha - 90^\circ) \\ &= -\frac{1}{\tan 2\alpha} \\ &= -\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \\ &= -\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \\ &= -\frac{\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)} \\ &= -\frac{\tan^2 \alpha - 1}{2 \tan \alpha}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \tan \beta = \frac{\tan^2 \alpha - 1}{2 \tan \alpha}$$

(2)

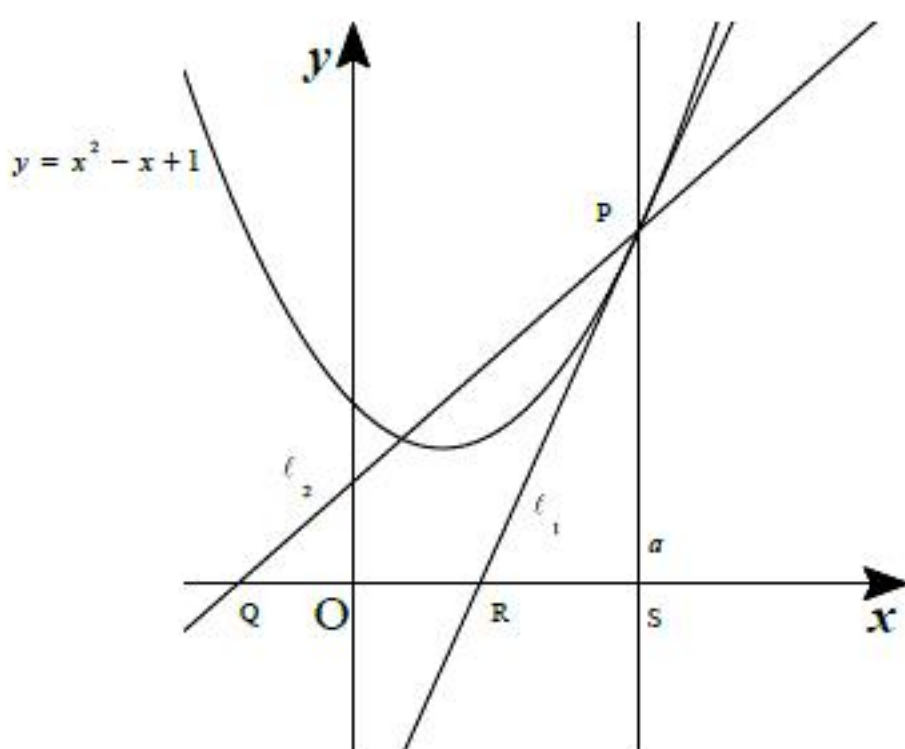
$f'(x) = 2x - 1$ であるから、 ℓ_1 の傾きは $2a - 1$ であるので

$$\tan \alpha = 2a - 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \tan \alpha = 2a - 1$$

(3)



図のように点P, Q, R, Sをおく。 $\angle PRS = \alpha$ であり、 ℓ_2 は ℓ_1 に関して直線 $x = a$ と対称であるから

$$\begin{aligned}\angle RPS &= \angle QPR \\ \Leftrightarrow \angle PRS - \angle PQR &= \angle PSR - \angle RPS \\ \Leftrightarrow \alpha - \angle PQR &= 90^\circ - \alpha \\ \therefore \angle PQR &= 2\alpha - 90^\circ\end{aligned}$$

となる。よって ℓ_2 の傾きは

$$\begin{aligned}\tan \angle PQR &= \tan (2\alpha - 90^\circ) \\ &= -\frac{1}{\tan 2\alpha} \\ &= -\frac{\tan^2 \alpha - 1}{2 \tan \alpha} \\ &= -\frac{(2a - 1)^2 - 1}{2(2a - 1)} \\ &= -\frac{2a^2 - 2a}{2a - 1}\end{aligned}$$

となる。 ℓ_2 は点 $(a, f(a))$ を通るから、求める方程式は

$$\begin{aligned}y &= \frac{2a^2 - 2a}{2a - 1}(x - a) + f(a) \\ &= \frac{2a^2 - 2a}{2a - 1}x - \frac{2a^3 - 2a^2}{2a - 1} + a^2 - a + 1 \\ &= \frac{2a^2 - 2a}{2a - 1}x - \frac{a^2 - 3a + 1}{2a - 1}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{2a^2 - 2a}{2a - 1}x - \frac{a^2 - 3a + 1}{2a - 1}$$

(4)

(3)より

$$\begin{aligned}y &= \frac{2a^2 - 2a}{2a - 1}x - \frac{a^2 - 3a + 1}{2a - 1} \\ \Leftrightarrow 2ay - y &= (2x - 1)a^2 + (3 - 2x)a - 1 \\ \Leftrightarrow (2x - 1)a^2 - (2x + 2y - 3)a + y - 1 &= 0\end{aligned}$$

となるが、これが a の値によらず成り立つ (x, y) が存在するとき

$$\begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 2x + 2y - 3 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

となるから、これを解いて

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (x, y) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

3

(1)

$$\begin{aligned} -\log_c x &= -\frac{\log_{\frac{1}{c}} x}{\log_{\frac{1}{c}} c} \\ &= -\frac{\log_{\frac{1}{c}} x}{-1} \\ &= \log_{\frac{1}{c}} x \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

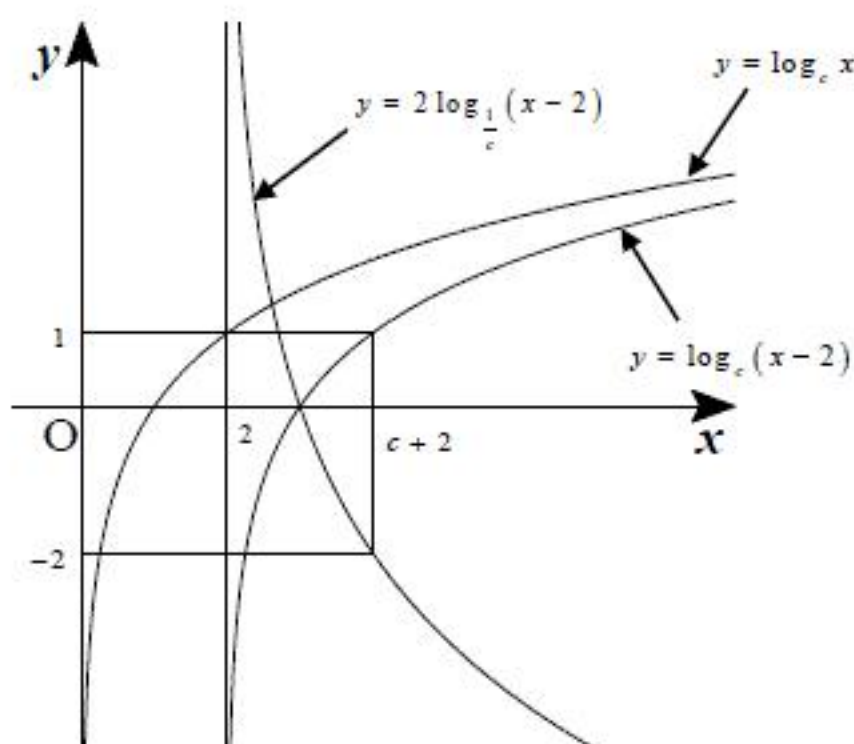
(2)

$y = \log_c (x-2)$ のグラフは $y = \log_c x$ のグラフを x 軸方向に 2 だけ移動したものである。また、(1)より

$$2 \log_{\frac{1}{c}} (x-2) = -2 \log_c (x-2)$$

であるから、 $y = 2 \log_{\frac{1}{c}} (x-2)$ のグラフは $y = \log_c (x-2)$ のグラフを x 軸に関して対称移動し、

y 方向に二倍したものである。よってグラフは以下のようになる。



(答) 前図

(3)

(2)より、 $y = \log_c x$ と $y = 2 \log_{\frac{1}{c}} (x-2)$ の交点の x 座標を α とすれば、

$$\log_c x \geq 2 \log_{\frac{1}{c}} (x-2)$$

$$\Leftrightarrow x \geq \alpha$$

となる。ここで

$$\log_c x = 2 \log_{\frac{1}{c}} (x-2)$$

$$\Leftrightarrow \log_c x = \log_c \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow x(x-2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 3x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

となるが、真数条件より $\alpha > 2$ であるから、 $\alpha = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ となる。よって解は

$$x \geq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

となる。

(答) $x \geq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

(1)

$y = x^2$ の導関数は $y' = 2x$ であるから、 c 上の点 (t, t^2) における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2t(x - t) + t^2 \\ &= 2tx - t^2 \end{aligned}$$

となる。これが点 $(a, a^2 - 9)$ を通るとき

$$\begin{aligned} a^2 - 9 &= 2ta - t^2 \\ \Leftrightarrow t^2 - 2at + a^2 - 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t - a - 3)(t - a + 3) &= 0 \\ \therefore t &= a + 3, a - 3 \end{aligned}$$

となるから、 A, B の座標は $(a + 3, (a + 3)^2)$, $(a - 3, (a - 3)^2)$ となる。これら二点を通る直線の

方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{(a + 3)^2 - (a - 3)^2}{(a + 3) - (a - 3)}(x - a - 3) + (a + 3)^2 \\ &= 2ax - a^2 + 9 \end{aligned}$$

となる。

(答) $y = 2ax - a^2 + 9$

(2)

(1)より、 ℓ と c で囲まれる領域の面積は

$$\begin{aligned} \int_{a-3}^{a+3} (2ax - a^2 + 9 - x^2) dx &= \int_{a-3}^{a+3} \{x - (a + 3)\} \{x - (a - 3)\} dx \\ &= \frac{1}{6} \{(a + 3) - (a - 3)\}^3 \\ &= \frac{1}{6} \cdot 6^3 \\ &= 36 \end{aligned}$$

となるから、 a の値にかかわらず一定である。

(証明終)