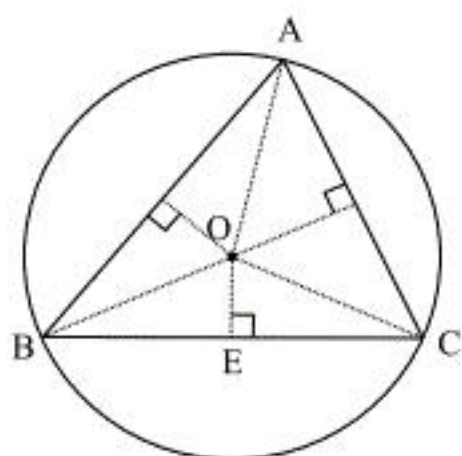


1

(1)



三角形 ABC が鋭角三角形であることから三角形 ABC は外接円の中心を内部に含む。外接円の中心を O とおくと、円周角の定理より

$$\angle BOA = 2 \cdot \angle BAC$$

となる。また、三角形 BOC は $OB = OC$ の二等辺三角形であるから、O から辺 BC へおろした垂線と BC の交点を E とおくと

$$\angle BOE = \angle BAC$$

$$BE = \frac{a}{2}$$

が成立する。一方、

$$\begin{aligned} BE &= BO \cdot \sin A \\ &= R \sin A \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} &= R \sin A \\ \therefore \frac{a}{\sin A} &= 2R \end{aligned}$$

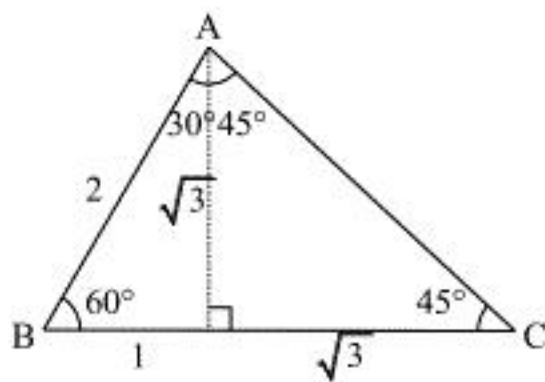
となる。同様にして

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

となるから、題意は示された。

(証明終)

(2)



(1)において、 $A = 75^\circ$, $B = 60^\circ$, $C = 45^\circ$, $c = 2$ であるとする。上図より、

$$a = 1 + \sqrt{3}$$

となるから、(1)で示した関係式より、

$$\begin{aligned} \frac{c}{\sin C} &= 2\sqrt{2} = \frac{a}{\sin A} \\ \therefore \sin 75^\circ &= \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

(1)

与えられた関数 $y = x^3 - 4x^2 + 3x$ を微分すると、

$$y' = 3x^2 - 8x + 3$$

$$= 3 \left(x - \frac{4 + \sqrt{7}}{3} \right) \left(x - \frac{4 - \sqrt{7}}{3} \right)$$

となる。このとき $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ とおくと、

$$f(x) = (3x^2 - 8x + 3) \left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{9} \right) - \frac{14}{9}x + \frac{4}{3}$$

と表せるから、

$$f \left(\frac{4 \pm \sqrt{7}}{3} \right) = -\frac{14}{9} \cdot \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3} + \frac{4}{3}$$

$$= \frac{-20 \mp 14\sqrt{7}}{27} \text{ (複号同順)}$$

となる。よってこの関数の増減は

x	...	$\frac{4 - \sqrt{7}}{3}$	...	$\frac{4 + \sqrt{7}}{3}$	...
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	$\frac{-20 + 14\sqrt{7}}{27}$	$\searrow$	$\frac{-20 - 14\sqrt{7}}{27}$	$\nearrow$

となる。

(答) 前表

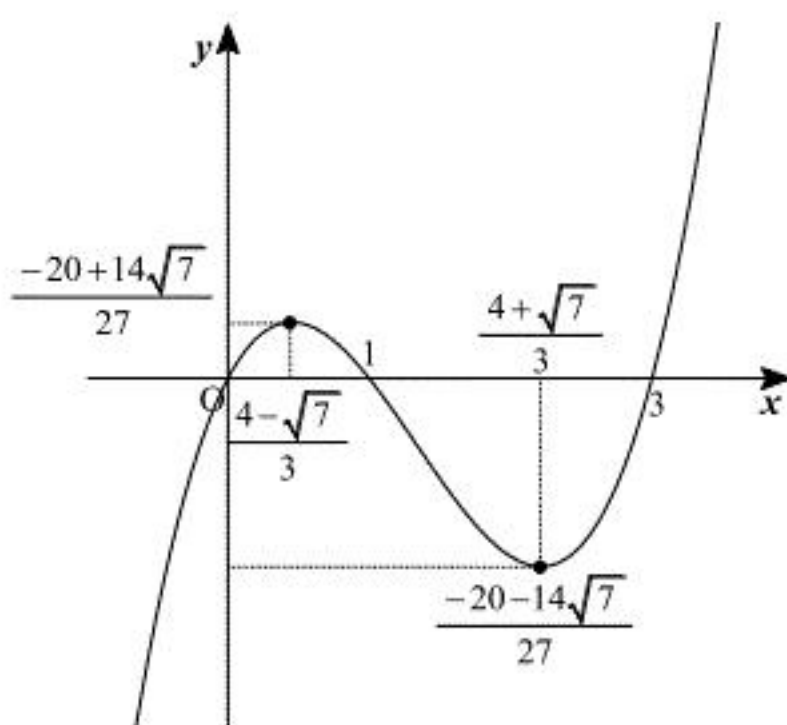
また、

$$f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x-3) = 0$$

であることに注意すれば、求めるグラフは



のようになる。

(答) 前図

(2)

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y = (3t^2 - 8t + 3)(x - t) + t^3 - 4t^2 + 3t$$

$$\therefore y = (3t^2 - 8t + 3)x - 2t^3 + 4t^2$$

となる。これが点 $(0, a)$ を通るとき、関係式

$$a = -2t^3 + 4t^2$$

が成り立つ。ここで

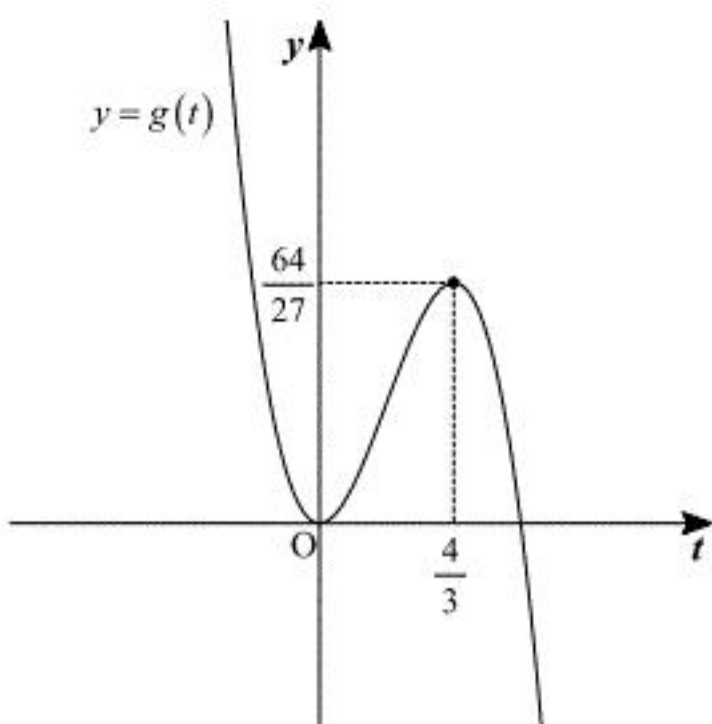
$$g(t) = -2t^3 + 4t^2$$

とおくと、 xy 平面上において曲線 $y = g(t)$ と直線 $y = a$ の $t > 0$ における交点の数が求める接線の本数となる。以下曲線 $y = g(t)$ の概形を調べる。ここで、

$$g'(t) = -2t(3t - 4)$$

であるから、 $g(t)$ の増減表は下図のようになる。

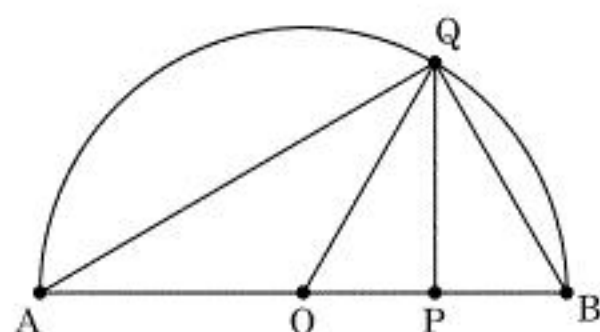
t	...	0	...	$\frac{4}{3}$	...
$g'(t)$	-	0	+	0	-
$g(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{64}{27}$	$\searrow$

よって $y = g(t)$ のグラフは下図のようになる。

曲線 $y = g(t)$ と直線 $y = a$ の $t > 0$ における交点の数が求める接線の本数であった。よって求める接線の本数は上図より、 $a > \frac{64}{27}$ のとき 0 本、 $a = \frac{64}{27}$ 、 $a \leq 0$ のとき 1 本、 $0 < a < \frac{64}{27}$ のとき 2 本となる。

(答) $a > \frac{64}{27}$ のとき 0 本、 $a = \frac{64}{27}$ 、 $a \leq 0$ のとき 1 本、 $0 < a < \frac{64}{27}$ のとき 2 本

(1)



上図のように半円 C の中心を O とおく。半径の長さを r とおくと、上図より

$$2r = AP + BP$$

$$\therefore r = \frac{AP + BP}{2}$$

となる。次に、 AB が半円 C の直径であることから円周角の定理より、 $\angle AQB = 90^\circ$ が成り立つ。また $QP \perp AB$ であるので $\angle BQP = \angle QAP$ が成り立つ。よって

$\triangle QAP \sim \triangle BQP$ となるから、

$$AP : QP = QP : BP$$

$$\Leftrightarrow PQ^2 = AP \cdot BP$$

$$\therefore PQ = \sqrt{AP \cdot BP} \quad (\because PQ > 0)$$

となる。

$$(\text{答}) \text{ 半径 } \frac{AP + BP}{2}, PQ = \sqrt{AP \cdot BP}$$

(2)

三平方の定理より

$$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$$

が成り立つから、

$$OQ \geq PQ \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。(1)の方程式で $AP = a (> 0)$, $BP = b (> 0)$ とおき、 $\textcircled{1}$ に代入することにより

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

を得る。ここで等号成立条件は $OP = 0$ 、即ち $a = b$ のときである。

(証明終)

(1)

点 X は線分 AB を $t:1-t$ に内分するから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX} &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \\ &= (1-t)p\overrightarrow{OA_0} + tq\overrightarrow{OB_0}\end{aligned}$$

であり、また、題意より

$$\overrightarrow{OX} = 2\overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{OB_0}$$

が成り立つ。ここで、 $\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OB_0}$ は $\vec{0}$ でなく互いに平行でないから、係数比較ができ

$$\begin{cases} (1-t)p = 2 \\ tq = 1 \end{cases}$$

を満たす。 $t=0, 1$ の場合、上の関係式を満たさないから

$$t \neq 0 \quad \text{かつ} \quad 1-t \neq 0$$

より、

$$p = \frac{2}{1-t}, \quad q = \frac{1}{t}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p = \frac{2}{1-t}, \quad q = \frac{1}{t}$$

(2)

$0 < t < 1$ を満たす実数 t が任意に与えられたとき、半直線 OA_0, OB_0 上の点 A, B で

点 X は線分 AB を $t:1-t$ に内分する $\cdots (*)$

を満たすものが存在することを示せばよい。具体的に点 A, B を与える方針で考える。(1)より、

点 A を $\overrightarrow{OA} = \frac{2}{1-t}\overrightarrow{OA_0}$ を満たす点としてとる

点 B を $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{t}\overrightarrow{OB_0}$ を満たす点としてとる

ことにすれば、 $\frac{2}{1-t}, \frac{1}{t} > 0$ ($\because 0 < t < 1$) より確かに点 A, B はそれぞれ半直線 OA_0, OB_0 上にあり、

$$\overrightarrow{OX} = 2\overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{OB_0} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

となるから、 $(*)$ も満たす。

(証明終)

(3)

点 X が直線 AB 上にあるとき、ある実数 t が存在して点 X は線分 AB を $t:1-t$ に内分すると考えられるから、このとき(1)より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= pq\overrightarrow{OA_0} \cdot \overrightarrow{OB_0} \\ &= \frac{2}{t(1-t)}\overrightarrow{OA_0} \cdot \overrightarrow{OB_0}\end{aligned}$$

となる。上式において $\overrightarrow{OA_0} \cdot \overrightarrow{OB_0}$ は定数でありその値は正であるから、 $\frac{2}{t(1-t)}$ の値が最小

となるとき内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ の値は最小となる。ここで、

$$\frac{2}{t(1-t)} = \frac{2}{-\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$$

となるから、 $\frac{2}{t(1-t)}$ が最小となるのは $t = \frac{1}{2}$ となるときであることが分かる。このとき

$\overrightarrow{OX} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ より

$$\overrightarrow{OX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

となるから、点 X は線分 AB の中点となることがわかる。

(証明終)