

(1)

点 Q の座標を (x, y) とおく。点 Q が直線 l に関して点 P と対称の位置にあることと、点 P と点 Q の中点が l 上にあり、かつ直線 PQ と l が垂直であることは同値である。このとき、

$$\begin{cases} a \cdot \frac{x+m}{2} + b \cdot \frac{y+n}{2} + c = 0 \\ \begin{pmatrix} x-m \\ y-n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x-m \\ y-n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} &= 0 \\ \therefore y &= \frac{b}{a}(x-m) + n \quad (a \neq 0) \end{aligned}$$

であるから、これを方程式 $a \cdot \frac{x+m}{2} + b \cdot \frac{y+n}{2} + c = 0$ に代入することによって

$$\begin{aligned} a \cdot \frac{x+m}{2} + b \cdot \frac{\frac{b}{a}(x-m) + 2n}{2} + c &= 0 \\ \therefore x &= \frac{-(a^2 - b^2)m - 2abn - 2ac}{a^2 + b^2} \\ &= m - \frac{2a(am + bn + c)}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

を得る。これを $y = \frac{b}{a}(x-m) + n$ に代入することで、

$$y = n - \frac{2b(am + bn + c)}{a^2 + b^2}$$

を得る。

(証明終)

(2)

直線 l_1 に関して点 A と対称な点を A' 、 l_2 について O と対称な点を O' とおく。題意より、点 B, C はそれぞれ直線 $O'A'$ と l_1 、 l_2 の交点であるから、まず A' 、 O' を求める。(1)の式に

$a=1, b=-1, c=1, m=5, n=5$ を代入することにより、

$$A'(4, 6)$$

と求まり、 $a=1, b=-2, c=-2, m=0, n=0$ を代入することにより

$$O'\left(\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}\right)$$

と求まる。よって、直線 $O'A'$ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{6 + \frac{8}{5}}{4 - \frac{4}{5}}(x-4) + 6 \\ \therefore y &= \frac{19}{8}x - \frac{7}{2} \end{aligned}$$

となるから、直線 l_1 の方程式と連立することによって、

$$B\left(\frac{36}{11}, \frac{47}{11}\right)$$

と求まり、直線 l_2 の方程式と連立することによって、

$$C\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad B\left(\frac{36}{11}, \frac{47}{11}\right), \quad C\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

(1)

$0 < a, b < 1$ より $\frac{1-a}{1-b} + 1 \neq 0$ であるから, P の逆行列 P^{-1} が存在する。逆行列を計算すると,

$$\begin{aligned} P^{-1} &= \frac{1}{\frac{1-a}{1-b} + 1} \begin{pmatrix} \frac{1-a}{1-b} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2-a-b} \begin{pmatrix} 1-a & -(1-b) \\ 1-b & 1-b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2-a-b} \begin{pmatrix} 1-a & -(1-b) \\ 1-b & 1-b \end{pmatrix}$$

(2)

(1)より,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{2-a-b} \begin{pmatrix} 1-a & -(1-b) \\ 1-b & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{1-a}{1-b} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2-a-b} \begin{pmatrix} a(1-a) - (1-a)(1-b) & (1-a-b)(1-b) \\ 1-b & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{1-a}{1-b} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2-a-b} \begin{pmatrix} (2-a-b)(a+b+1) & 0 \\ 0 & 2-a-b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+b-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{pmatrix} a+b-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)

(2)より,

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} (a+b-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるから,

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} (a+b-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{1}{2-a-b} \cdot \frac{1}{1-b} \begin{pmatrix} 1-b & 1-b \\ -(1-b) & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a+b-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a & -(1-b) \\ 1-b & 1-b \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2-a-b} \begin{pmatrix} (1-a)(a+b-1)^n + (1-b) & -(1-b)(a+b-1)^n + (1-b) \\ -(1-a)(a+b-1)^n + (1-a) & (1-b)(a+b-1)^n + (1-a) \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2-a-b} \begin{pmatrix} \left\{ \frac{1}{3}(1-a) - \frac{2}{3}(1-b) \right\} (a+b-1)^n + (1-b) \\ \left\{ -\frac{1}{3}(1-a) + \frac{2}{3}(1-b) \right\} (a+b-1)^n + (1-a) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで $0 < a < 1, 0 < b < 1$ より,

$$-1 < a+b-1 < 1$$

であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a+b-1)^n = 0$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \frac{1}{2-a-b} \{0 + (1-b)\} = \frac{1-b}{2-a-b} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= \frac{1}{2-a-b} \{0 + (1-a)\} = \frac{1-a}{2-a-b} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1-b}{2-a-b}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1-a}{2-a-b}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = A \cdot A^{n-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_{n-1} + (1-b)y_{n-1} \\ (1-a)x_{n-1} + by_{n-1} \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

かつ

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{2}$$

となるような各事象を考えればよい。ある物体 P がとり得る状態として, 2 つの状態 X, Y があるとする。ある時刻に物体 P が状態 X であるとして, その 1 秒後に物体 P がそのまま状態

X であるような事象の確率が a であるとし, 状態 Y に変化するような事象の確率を $(1-a)$ とする。同様に, ある時刻に物体 P が状態 Y であるとして, その 1 秒後に物体 P がそのまま状態 Y であるような事象の確率が b であるとし, 状態 X に変化するような事象の確率を $(1-b)$

とする。また, 初め(0 秒後)に物体 P は $\frac{1}{3}$ の確率で状態 X をとり, $\frac{2}{3}$ の確率で状態 Y をとる

ことにする。このとき, n 秒後に状態 X であるような事象の確率を x_n , 状態 Y であるような事象の確率を y_n とおくと, ①かつ②が成り立つ。

(答) 前例

3

(1)

すべての自然数 n に対して

$$x_n \geq 2 \qquad \cdots (*)$$

が成立することを数学的帰納法によって示す。

[i] $n=1$ のとき

$x_1=3$ より $n=1$ のとき明らかに成り立つ。

[ii] $n=k$ のとき $(*)$ が成立することを仮定し、 $n=k+1$ で $(*)$ が成立することを示す。

$x_k \geq 2$ より、 $x_k > 0$ 、 $\frac{1}{x_k} > 0$ であるから、相加、相乗平均に関する不等式より

$$x_{n+1} \geq \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{x_n \cdot \frac{4}{x_n}} = 2$$

が成り立つ。よって $n=k+1$ でも $(*)$ は成立する。

したがって [i], [ii] より、すべての自然数 n について $(*)$ は成立する。

(証明終)

(2)

示すべき不等式の(右辺)-(左辺)を考えると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x_n-2)-(x_{n+1}-2) &= \frac{1}{2}(x_n-2) - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{4}{x_n}\right) + 2 \\ &= 1 - \frac{2}{x_n} \end{aligned}$$

となり、(1)より $x_n \geq 2$ であるから、

$$\frac{1}{2}(x_n-2)-(x_{n+1}-2) \geq 0$$

$$\therefore x_{n+1}-2 \leq \frac{1}{2}(x_n-2)$$

となる。

(証明終)

(3)

(1), (2)より、

$$0 \leq x_n - 2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot (x_1 - 2)$$

$$\therefore 0 \leq x_n - 2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

となる。ここで $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ であるから、はさみうちの原理より、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2) &= 0 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) 2

(4)

与えられた 2 つの関数の差をとると、

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= \frac{2}{x} - \frac{1}{2}x \\ &= \frac{4-x^2}{2x} \end{aligned}$$

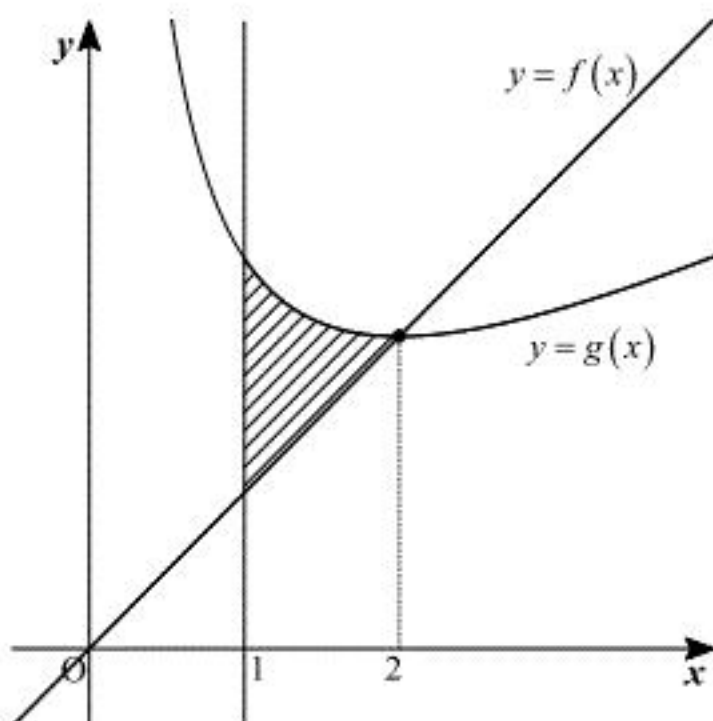
となる。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{4-x^2}{2x} &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4-x^2}{2x} \cdot x^2 &> 0 \cdot x^2 \quad (\because x \neq 0) \\ \Leftrightarrow x(4-x^2) &> 0 \\ \therefore x < -2, 0 < x < 2 \end{aligned}$$

となるから、 $x < -2, 0 < x < 2$ が求める範囲となる。

(答) $x < -2, 0 < x < 2$

(5)



(4)より、求める面積は上図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned} \int_1^2 \{g(x) - f(x)\} dx &= \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2} \right) dx \\ &= \left[2 \log |x| - \frac{x^2}{4} \right]_1^2 \\ &= 2 \log 2 - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

となる。

(1)

部分積分を利用することによって、

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} \sin^n(\alpha+x) dx &= \int_0^{\pi} \sin^{n-1}(\alpha+x) \{-\cos(\alpha+x)\}' dx \\
 &= \left[-\sin^{n-1}(\alpha+x) \cos(\alpha+x) \right]_0^{\pi} + (n-1) \int_0^{\pi} \sin^{n-2}(\alpha+x) \cos^2(\alpha+x) dx \\
 &= (n-1) \int_0^{\pi} \{ \sin^{n-2}(\alpha+x) - \sin^n(\alpha+x) \} dx \\
 &= (n-1) \int_0^{\pi} \sin^{n-2}(\alpha+x) dx - (n-1) \int_0^{\pi} \sin^n(\alpha+x) dx
 \end{aligned}$$

となる。(ただし n が偶数であるため $\left[-\sin^{n-1}(\alpha+x) \cos(\alpha+x) \right]_0^{\pi} = 0$ となることを用いた。)

したがって、

$$\begin{aligned}
 n \int_0^{\pi} \sin^n(\alpha+x) dx &= (n-1) \int_0^{\pi} \sin^{n-2}(\alpha+x) dx \\
 \therefore \int_0^{\pi} \sin^n(\alpha+x) dx &= \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi} \sin^{n-2}(\alpha+x) dx
 \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

三角関数の合成を利用することによって、

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha+x) \quad (\because a \neq 0 \text{ かつ } b \neq 0)$$

と表せる。(ただし α は $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ をみたす。) よって(1)の結果を

用いて

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} (a \sin x + b \cos x)^6 dx &= \int_0^{\pi} \left\{ \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha+x) \right\}^6 dx \\
 &= (a^2 + b^2)^3 \int_0^{\pi} \sin^6(\alpha+x) dx \\
 &= (a^2 + b^2)^3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^0(\alpha+x) dx \\
 &= \frac{5\pi}{16} (a^2 + b^2)^3
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{5\pi}{16} (a^2 + b^2)^3$