

(1)

$\log_a x = t$ とおくと、与えられた関数は

$$\begin{aligned} y &= -(\log_a x)^2 + \log_a x^4 \\ &= -(\log_a x)^2 + 4\log_a x \\ &= -t^2 + 4t \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = -t^2 + 4t$$

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned} 0 &\leq y \leq 3 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq -t^2 + 4t \leq 3 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 \leq -t^2 + 4t$ について

$$\begin{aligned} 0 &\leq -t^2 + 4t \\ \Leftrightarrow t(t-4) &\leq 0 \\ \therefore 0 &\leq t \leq 4 \end{aligned}$$

となり、 $-t^2 + 4t \leq 3$ について

$$\begin{aligned} -t^2 + 4t &\leq 3 \\ \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (t-1)(t-3) &\geq 0 \\ \therefore t &\leq 1, 3 \leq t \end{aligned}$$

となる。よって求める t の範囲は

$$0 \leq t \leq 1, 3 \leq t \leq 4$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 0 \leq t \leq 1, 3 \leq t \leq 4$$

(3)

$2 \leq x \leq 4$ のとき

$$\log_a 2 \leq t \leq \log_a 4$$

である。この不等式が、(2)で求めた不等式に含まれるような条件を求めればよい。このような条件は

$$「0 \leq \log_a 2 \text{ かつ } \log_a 4 \leq 1」 \text{ または } 「3 \leq \log_a 2 \text{ かつ } \log_a 4 \leq 4」$$

である。ここで、「 $0 \leq \log_a 2$ かつ $\log_a 4 \leq 1$ 」について $a > 1$ に注意すると、この条件は

$$4 \leq a$$

と同値となる。次に、条件「 $3 \leq \log_a 2$ かつ $\log_a 4 \leq 4$ 」について

$$1 < a \leq \sqrt[3]{2} \text{ かつ } a \geq \sqrt{2}$$

と同値となるが、 $1 < a \leq \sqrt[3]{2}$ かつ $a \geq \sqrt{2}$ は成り立たないから、求める範囲は

$$4 \leq a$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 4 \leq a$$

(1)

点 Q の座標を (x, y) とおく。点 Q が直線 l に関して点 P と対称の位置にあることと、点 P と点 Q の中点が l 上にあり、かつ直線 PQ と l が垂直であることは同値である。このとき、

$$\begin{cases} a \cdot \frac{x+m}{2} + b \cdot \frac{y+n}{2} + c = 0 \\ \begin{pmatrix} x-m \\ y-n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x-m \\ y-n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} &= 0 \\ \therefore y &= \frac{b}{a}(x-m) + n \quad (a \neq 0) \end{aligned}$$

であるから、これを方程式 $a \cdot \frac{x+m}{2} + b \cdot \frac{y+n}{2} + c = 0$ に代入することによって

$$\begin{aligned} a \cdot \frac{x+m}{2} + b \cdot \frac{\frac{b}{a}(x-m) + 2n}{2} + c &= 0 \\ \therefore x &= \frac{-(a^2 - b^2)m - 2abn - 2ac}{a^2 + b^2} \\ &= m - \frac{2a(am + bn + c)}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

を得る。これを $y = \frac{b}{a}(x-m) + n$ に代入することで、

$$y = n - \frac{2b(am + bn + c)}{a^2 + b^2}$$

を得る。

(証明終)

(2)

直線 l_1 に関して点 A と対称な点を A' 、 l_2 について O と対称な点を O' とおく。題意より、点 B, C はそれぞれ直線 $O'A'$ と l_1 、 l_2 の交点であるから、まず A' 、 O' を求める。(1)の式に $a=1, b=-1, c=1, m=5, n=5$ を代入することにより、

$$A'(4, 6)$$

と求まり、 $a=1, b=-2, c=-2, m=0, n=0$ を代入することにより

$$O'\left(\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}\right)$$

と求まる。よって、直線 $O'A'$ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{6 + \frac{8}{5}}{4 - \frac{4}{5}}(x - 4) + 6 \\ \therefore y &= \frac{19}{8}x - \frac{7}{2} \end{aligned}$$

となるから、直線 l_1 の方程式と連立することによって、

$$B\left(\frac{36}{11}, \frac{47}{11}\right)$$

と求まり、直線 l_2 の方程式と連立することによって、

$$C\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad B\left(\frac{36}{11}, \frac{47}{11}\right), \quad C\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

(1)

平方完成することで,

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$

となるから,

$$A=\frac{b}{2a}, B=\frac{b^2}{4a}-c$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A=\frac{b}{2a}, B=\frac{b^2}{4a}-c$$

(2)

$f'(x)=2ax+b$ より, $x=\alpha$ における接線の方程式は

$$y=(2a\alpha+b)(x-\alpha)+a\alpha^2+b\alpha+c$$

$$\therefore y=(2a\alpha+b)x-a\alpha^2+c$$

となる。放物線の軸に関する対称性より, 直線 G_1, G_2 の交点は放物線 G の軸にあり, その x 座

標は $\frac{\alpha+\beta}{2}$ となる。また求める面積も G の軸に対象となるから, $a>0$ より

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_a^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \left\{ f(x) - ((2a\alpha+b)x - a\alpha^2 + c) \right\} dx \\ &= 2a \int_a^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x-\alpha)^2 dx \\ &= 2a \left[\frac{(x-\alpha)^3}{3} \right]_a^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \\ &= \frac{a}{12} (\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

となる。ここで方程式 $ax^2+bx+c=0$ に対し解の公式を用いることで

$$\begin{aligned} \beta-\alpha &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} - \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a} \quad (\because b^2-4ac>0) \end{aligned}$$

となる。よって

$$S = \frac{1}{12a^2} (b^2-4ac)^{\frac{3}{2}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{12a^2} (b^2-4ac)^{\frac{3}{2}}$$

(3)

a の値を固定するとき b は $7-a$ 通りの値を c は a 通りの値を取ることができるから, $b \geq a$
 $\geq c$ となる組み合わせの数は

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^6 (7-a)a &= \sum_{a=1}^6 (7a-a^2) \\ &= 7 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} - \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} \\ &= 56 \text{ [通り]} \end{aligned}$$

となる。このうち $D=b^2-4ac>0$ かつ $S=\frac{1}{12a^2}(b^2-4ac)^{\frac{3}{2}} \leq \frac{1}{24}$ をみたす (b, a, c) の組み合わせを b の値について場合分けすることで求める。

[1] $b=1, 2$ のとき

$4ac \geq 1$ より, 条件を満たす (b, a, c) の組はない。

[2] $b=3$ のとき

$$0 < (9-4ac)^3 \leq \frac{a^4}{4}$$

を満たす (a, c) の組は $(2, 1)$ に限る。

[3] $b=4$ のとき

$$0 < (16-4ac)^3 \leq \frac{a^4}{4}$$

を満たす (a, c) の組は, $a(\leq 4)$ の値によって場合分けして順々に当てはめていくことで存在しないことがわかる。

[4] $b=5$ のとき

$$0 < (25-4ac)^3 \leq \frac{a^4}{4}$$

を満たす (a, c) の組は $(5, 1), (3, 2)$ である。

[5] $b=6$ のとき

$$0 < (36-4ac)^3 \leq \frac{a^4}{4}$$

を満たす (a, c) の組は $(4, 2)$ に限る。

以上[1], [2], [3], [4], [5]より, 条件を満たす (b, a, c) の組み合わせは

$$(b, a, c) = (3, 2, 1), (5, 3, 2), (5, 5, 1), (6, 4, 2)$$

の4つであるから, 求める確率は

$$\frac{4}{56} = \frac{1}{14}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{14}$$

(4)

(3)より, 求める期待値は

$$\frac{1}{56} \cdot (3+5+5+6) = \frac{19}{56}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{19}{56}$$

(1)

与えられた関数 $y = x^2$ を微分すると、

$$y' = 2x$$

となるから、求める L_m の式は

$$y = 2m(x - m) + m^2$$

$$\therefore y = 2mx - m^2$$

となる。

(答) $y = 2mx - m^2$

(2)

$(1, a), (b, 0)$ を(1)で求めた方程式 $y = 2mx - m^2$ に代入すると

$$\begin{cases} a = 2m - m^2 \\ 0 = 2mb - m^2 \end{cases}$$

を得る。ここで $m \neq 0$ のとき $b = \frac{m}{2}$, $m = 0$ のとき b は任意の実数となる。

(答) $a = 2m - m^2$, $0 < m \leq 1$ のとき $b = \frac{m}{2}$, $m = 0$ のとき b は任意の実数

(3)

$m = 0$ のとき、点 P, Q, R が同一直線上の点となるため三角形が出来ない。 $0 < m \leq 1$ のとき、

$\angle PRQ$ は直角であり、 $a = 2m - m^2 > m(2 - m) > 0$ かつ $b = \frac{m}{2} < 1$ であるから、求める面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} QR \cdot PR &= \frac{1}{2} a(1 - b) \\ &= \frac{1}{4} m(m - 2)^2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{4} m(m - 2)^2$

(4)

$f(m) = \frac{1}{4} m(m - 2)^2$ とおく。この関数を微分することで、

$$\begin{aligned} f'(m) &= \frac{1}{4} (m - 2)^2 + \frac{1}{4} m \cdot 2(m - 2) \\ &= \frac{1}{4} (m - 2)(3m - 2) \end{aligned}$$

となるから、増減表は以下のようになる。

m	0	...	$\frac{2}{3}$	...	1
$f'(m)$	$\times$	+	0	-	
$f(m)$	$\times$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	

したがって、求める最大値は

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$$

となる。

(答) $\frac{8}{27}$