

前期日程

平成 20 年度入学試験問題（前期日程）

数 学

（理 工 学 部）

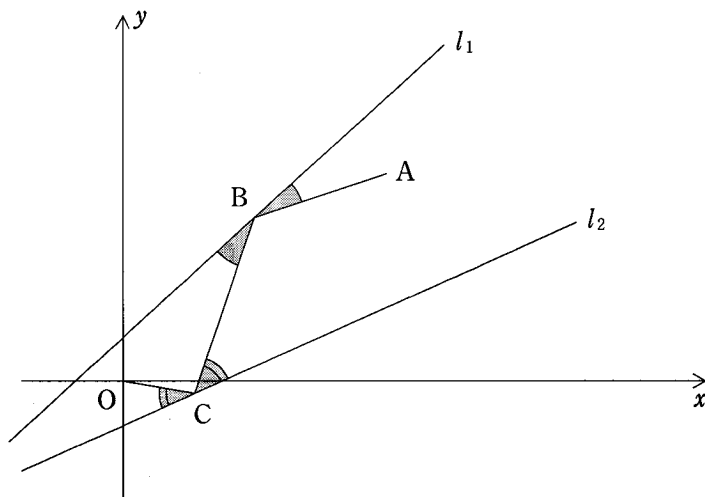
—— 解 答 上 の 注 意 事 項 ——

- 1 「解答始め」の合図があるまで問題を見てはならない。
- 2 「解答始め」の合図があったら、初めにすべての解答紙の所定欄に受験番号を記入すること。
受験番号は算用数字で横書きとする。
- 3 問題冊子 1 冊と解答冊子 1 冊(解答紙 4 枚および計算紙 1 枚)がある。
- 4 問題は

 から

 まで 4 問ある。各問の解答は所定の解答紙に記入すること。
- 5 解答しない問題がある場合でも、解答紙 4 枚すべてを提出すること。
- 6 問題冊子は持ち帰ること。

- 1 O を原点とする座標平面上の 2 直線 $x - y + 1 = 0$ と $x - 2y - 2 = 0$ をそれぞれ l_1, l_2 とし、点 $A(5, 5)$ をとる。点 B と点 C はそれぞれ l_1, l_2 上にあるとする。ただし、下図の影をつけた部分の角が示しているように、線分 AB, BC と直線 l_1 とのなす角は等しく、線分 BC, CO と直線 l_2 とのなす角は等しいとする。



- (1) $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ を満たす定数 a, b, c に対して、直線 $ax + by + c = 0$ を l とする。直線 l に関して、点 $P(m, n)$ と対称な点 Q の座標は

$$\left(m - \frac{2a(am + bn + c)}{a^2 + b^2}, n - \frac{2b(am + bn + c)}{a^2 + b^2} \right)$$

であることを証明せよ。ただし、 P は l 上の点でないとする。

- (2) 点 B と点 C の座標を求めよ。

2 $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ を満たす実数 a, b に対して, 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{1-a}{1-b} \end{pmatrix}$$

とする。次の問いに答えよ。

(1) P の逆行列 P^{-1} を求めよ。

(2) $P^{-1}AP$ を求めよ。

(3) 自然数 n に対して,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

とすると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ を求めよ。

(4) x_n, y_n は、どのような試行に対する、どのような事象の確率を与えていると考えられるか、例を1つ示せ。

3 n は自然数とし、数列 $\{x_n\}$ は

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{4}{x_n} \right) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定まるものとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) すべての n について $x_n \geq 2$ であることを証明せよ。
- (2) すべての n について $x_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{2}(x_n - 2)$ であることを証明せよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ。
- (4) $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{4}{x} \right)$ とするとき、 $g(x) > f(x)$ となる x の範囲を求めよ。
- (5) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ および $x = 1$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

4

- (1) 自然数 n と実数 α について, n が偶数のとき,

$$\int_0^{\pi} \sin^n(\alpha + x) dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi} \sin^{n-2}(\alpha + x) dx$$

となることを示せ。

- (2) $a \neq 0$, $b \neq 0$ を満たす実数 a , b に対して,

$$\int_0^{\pi} (a \sin x + b \cos x)^6 dx$$

を求めよ。