

$$(1) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = 2$$

ここで、 $x+y=2$ なので $xy=1$

解と係数の関係より、求める x, y を解にもつ 2 次方程式は、

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

これは $t=1$ を重解にもつので、求める x, y は

$$x = y = 1$$

(答) $x = y = 1$

$$(2) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + yz + zx}{xyz} = 3$$

ここで、 $xyz=1$ なので $xy + yz + zx = 3$

解と係数の関係より、求める x, y, z を解にもつ 3 次方程式は、

$$t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$

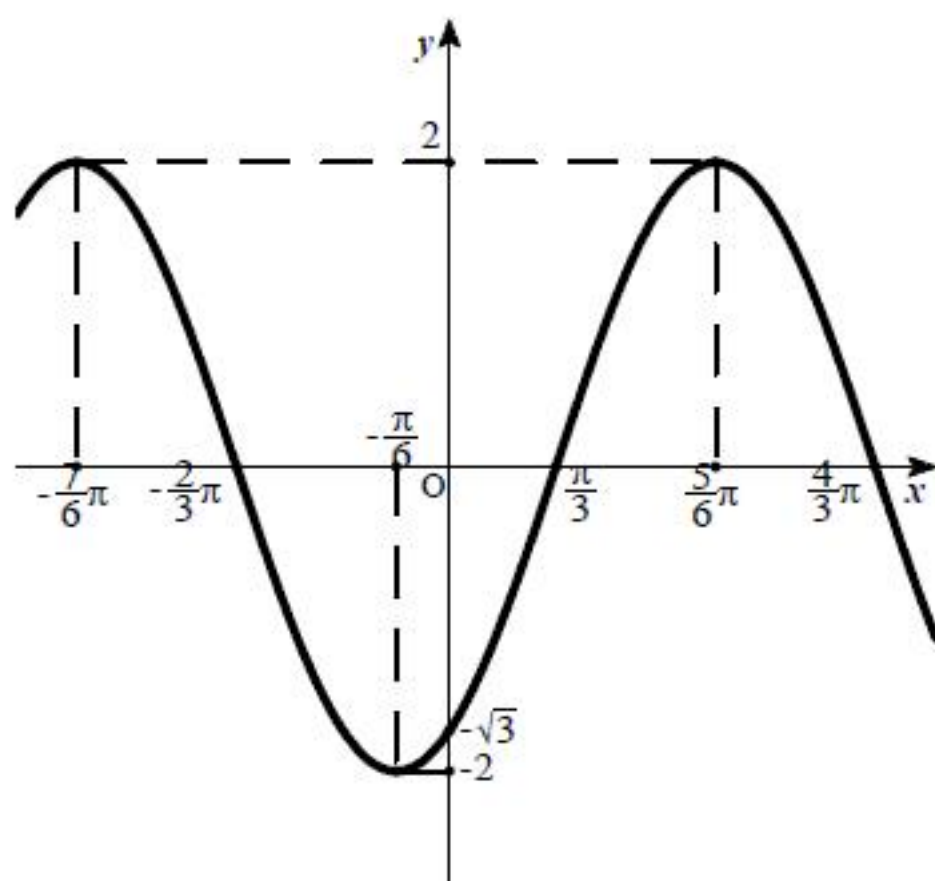
これは $t=1$ を 3 重解にもつので、求める x, y, z は

$$x = y = z = 1$$

(答) $x = y = z = 1$

$$(1) \quad y = f(\theta) = \sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta = 2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right)$$

これを図示すると、次図のようになる。



(答)

$$(2) \quad f(\theta) = 2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) = 1$$

$$\sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{4}{3}\pi < \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{2}{3}\pi \text{ に注意して}$$

$$\theta - \frac{\pi}{3} = -\frac{7}{6}\pi, \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \theta = -\frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{2}$$

$$(答) \quad \theta = -\frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{2}$$

$$(3) \quad \sin \theta > \sqrt{3} \cos \theta + 1$$

$$\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta > 1$$

$$\sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) > \frac{1}{2}$$

$$-\frac{4}{3}\pi < \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{2}{3}\pi \text{ に注意して}$$

$$-\frac{4}{3}\pi < \theta - \frac{\pi}{3} < -\frac{7}{6}\pi, \frac{\pi}{6} < \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore -\pi < \theta < -\frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

$$(答) \quad -\pi < \theta < -\frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項は, $a_n = a - d + nd$ なので

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= \sum_{k=1}^n (a - d + kd) \\ &= n(a - d) + d \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} \end{aligned}$$

(証明終)

(2) (i) $1 - x^n = (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{n-1}) \quad \cdots (A)$

$n=1$ のとき $1 - x^n = 1 - x$ より (A) は成り立つ。

$n=k$ (k は自然数) のとき (A) が成り立つと仮定する。

つまり $1 - x^k = (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{k-1})$

このとき

$$\begin{aligned} (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{k-1} + x^k) &= (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{k-1}) + (1 - x)x^k \\ &= 1 - x^k + x^k - x^{k+1} = 1 - x^{k+1} \end{aligned}$$

よって, $n=k+1$ のときも (A) は成り立つ。

以上より, 任意の自然数 n に対して (A) が成り立つことが示された。

(証明終)

(ii) $r=1$ のとき $a_n = a_1 = a$ より $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = na$

$r \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= a + ar + \cdots + ar^{n-1} \\ &= a(1 + r + \cdots + r^{n-1}) \\ &= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \quad (\because (i)) \end{aligned}$$

(証明終)

直線 AB の式は $y = \frac{b^2 - a^2}{b - a}(x - a) + a^2 = (a + b)x - ab$

点 P における放物線の接線の式は $y = 2p(x - p) + p^2 = 2px - p^2$

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_a^p \left\{ (a + b)x - ab - (2px - p^2) \right\} dx \\ &= \left[\frac{a + b - 2p}{2} x^2 + (p^2 - ab)x \right]_a^p \\ &= \frac{a + b - 2p}{2} (p^2 - a^2) + (p^2 - ab)(p - a) \\ &= \frac{(b - a)(p - a)^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_a^p \left\{ x^2 - (2px - p^2) \right\} dx = \int_a^p (x - p)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} (x - p)^3 \right]_a^p = \frac{1}{3} (p - a)^3 \\ \therefore \frac{S_2}{S_1} &= \frac{2(p - a)}{3(b - a)} \end{aligned}$$

ここで、 $a < p < b$ より

$$0 = \frac{2(a - a)}{3(b - a)} < \frac{S_2}{S_1} < \frac{2(b - a)}{3(b - a)} = \frac{2}{3}$$

$$(\text{答}) \quad 0 < \frac{S_2}{S_1} < \frac{2}{3}$$

