

1

(1) 公差を d とおくと、一般項は $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$$a_5 = 14, a_{10} = 29 \text{ より}$$

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 14 \\ a_1 + 9d = 29 \end{cases}$$

これを解いて、 $a_1 = 2, d = 3$

よって、一般項は $a_n = 3n - 1$

(答) $a_n = 3n - 1$

$$(2) \sum_{k=1}^n 2^{-a_k} = \sum_{k=1}^n 2^{-3k+1}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{8} \right)^k$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{8} \right)^n}{1 - \frac{1}{8}}$$

$$= \frac{2}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{8} \right)^n \right\}$$

(答) $\frac{2}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{8} \right)^n \right\}$

$$(3) \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right)$$

$$= \frac{n}{2(3n+2)}$$

(答) $\frac{n}{2(3n+2)}$

$$(4) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-a_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2^{-a_k}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{8} \right)^n \right\}$$

$$= \frac{2}{7}$$

同様にして、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{1}{6}$$

(答) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-a_k} = \frac{2}{7}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{6}$

2

(1) $f(x) = \sqrt{x} - \log x$ より,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}$$

これより $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	1	...	4	...
$f'(x)$	$\searrow$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$2(1 - \log 2)$	$\nearrow$

増減表より, $f(x)$ の最小値は $f(4) = 2(1 - \log 2)$ であるが,
 $e > 2$ ゆえ $1 - \log 2 > 0$ なので, $f(x) > 0$ が示された。

(証明終)

$$\begin{aligned} (2) \quad g(x) - \sqrt{x} &= \frac{x}{\log x} - \sqrt{x} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - \log x)}{\log x} \end{aligned}$$

(1)より $\sqrt{x} - \log x > 0$ であり, $x > 1$ において $\sqrt{x} > 0$, $\log x > 0$ であるから
 $\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - \log x)}{\log x} > 0$ となる。

よって, $g(x) - \sqrt{x} > 0$ つまり $g(x) > \sqrt{x}$ が示された。

また, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty$ なので, 追い出しの原理より $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ である。

(証明終)

$$\begin{aligned} (3) \quad g'(x) &= \frac{1 \cdot \log x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\log x)^2} \\ &= \frac{\log x - 1}{(\log x)^2} \end{aligned}$$

$g'(x) = 0$ を解くと, $\log x - 1 = 0 \therefore x = e$

また,

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{\frac{1}{x}(\log x)^2 - (\log x - 1) \cdot 2\log x \cdot \frac{1}{x}}{(\log x)^4} \\ &= \frac{-\log x + 2}{x(\log x)^3} \end{aligned}$$

$g''(x) = 0$ を解くと, $-\log x + 2 = 0 \therefore x = e^2$

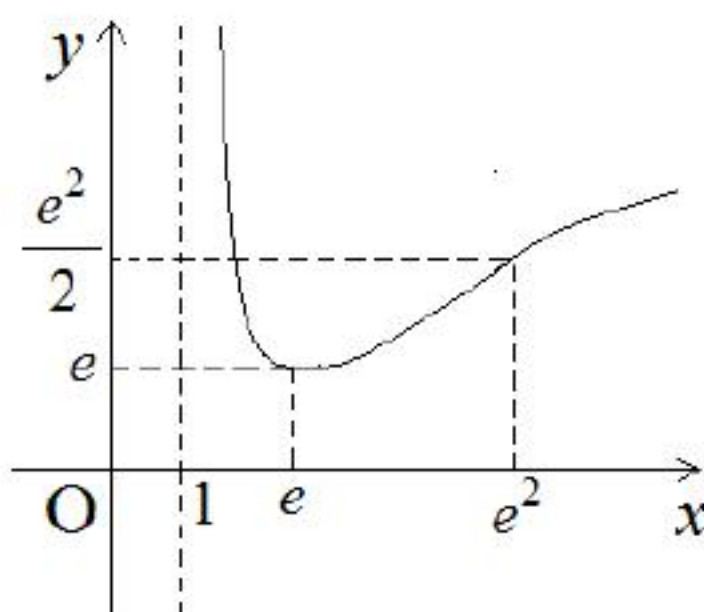
これより $g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	1	...	e	...	e^2	...
$g'(x)$	$\searrow$	-	0	+	+	+
$g''(x)$	$\searrow$	+	+	+	0	-
$g(x)$	$\searrow$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$\frac{e^2}{2}$	$\nearrow$

よって, 極小値は $g(e) = e$ であり, 変曲点の座標は $\left(e^2, \frac{e^2}{2}\right)$ となる。

(答) 極小値 e ($x = e$ のとき), 変曲点の座標 $\left(e^2, \frac{e^2}{2}\right)$

(4) (3)の増減表と, $\lim_{x \rightarrow 1+0} g(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ よりグラフは次のようになる。



(答)

3

- (1) $\frac{1}{4}\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$ において、 $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) \geq 0$ なので、

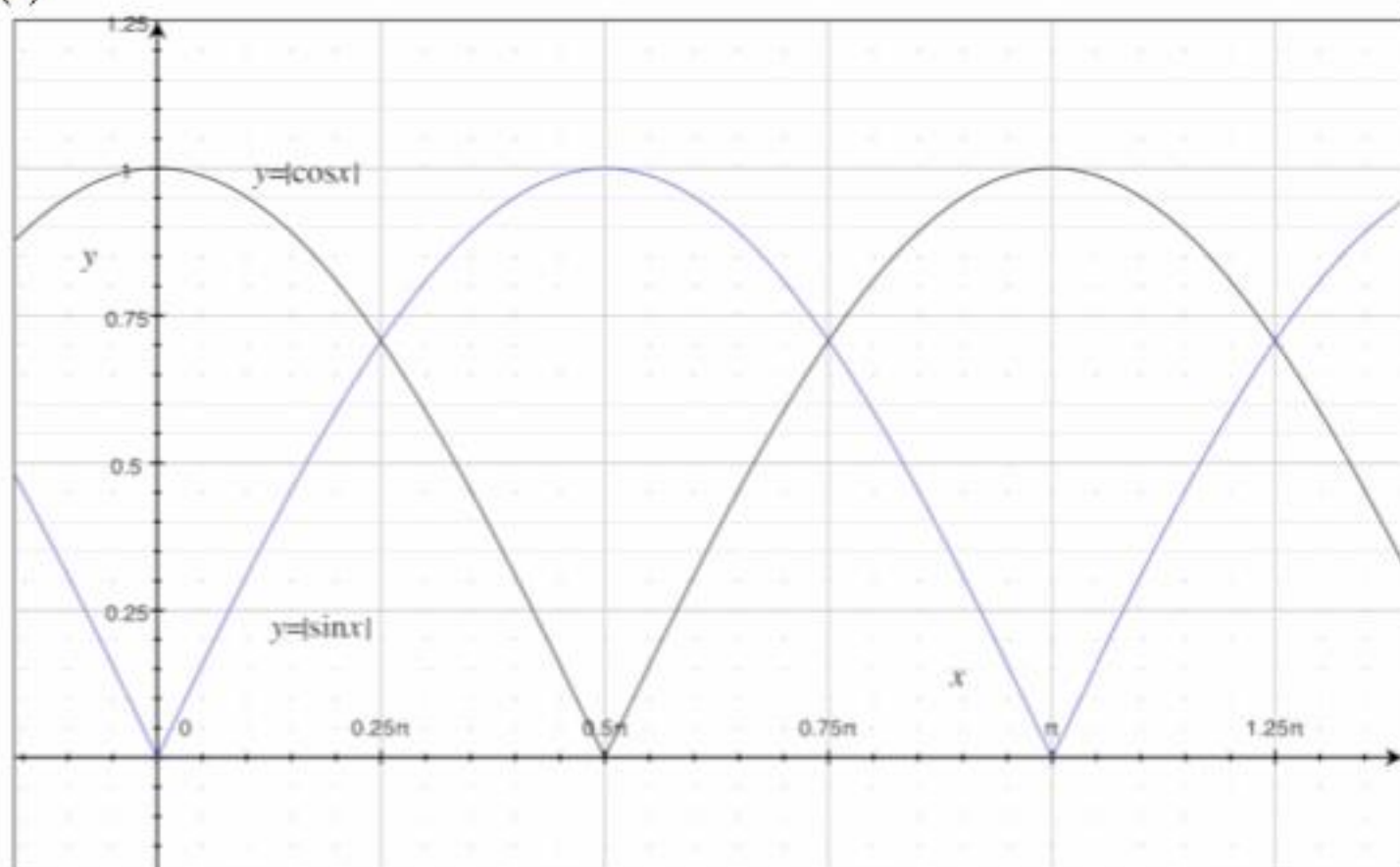
図形 D の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} (\sin x - \cos x) dx \\ &= \left[-\cos x - \sin x \right]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$



(答) $2\sqrt{2}$

(2)



- (i) $\frac{1}{4}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ のとき、 $|\sin x| = \sin x$, $|\cos x| = \cos x$ であり、

$$|\sin x| - |\cos x| = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) \geq 0 \text{ なので}$$

$$|\sin x| \geq |\cos x| \quad (\text{等号成立は } x = \frac{1}{4}\pi \text{ のとき})$$

- (ii) $\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \pi$ のとき、 $|\sin x| = \sin x$, $|\cos x| = -\cos x$ であり、

$$|\sin x| - |\cos x| = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) \text{ なので、}$$

$$\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi \text{ のとき、} |\sin x| \geq |\cos x| \quad (\text{等号成立は } x = \frac{3}{4}\pi \text{ のとき})$$

$$\frac{3}{4}\pi \leq x \leq \pi \text{ のとき、} |\sin x| < |\cos x|$$

- (iii) $\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$ のとき、 $|\sin x| = -\sin x$, $|\cos x| = -\cos x$ であり、

$$|\sin x| - |\cos x| = -\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{5}{4}\pi\right) \leq 0 \text{ なので}$$

$$|\sin x| \leq |\cos x| \quad (\text{等号成立は } x = \frac{5}{4}\pi \text{ のとき})$$

以上をまとめて、

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{4}\pi < x < \frac{3}{4}\pi \text{ のとき、} |\sin x| > |\cos x|$$

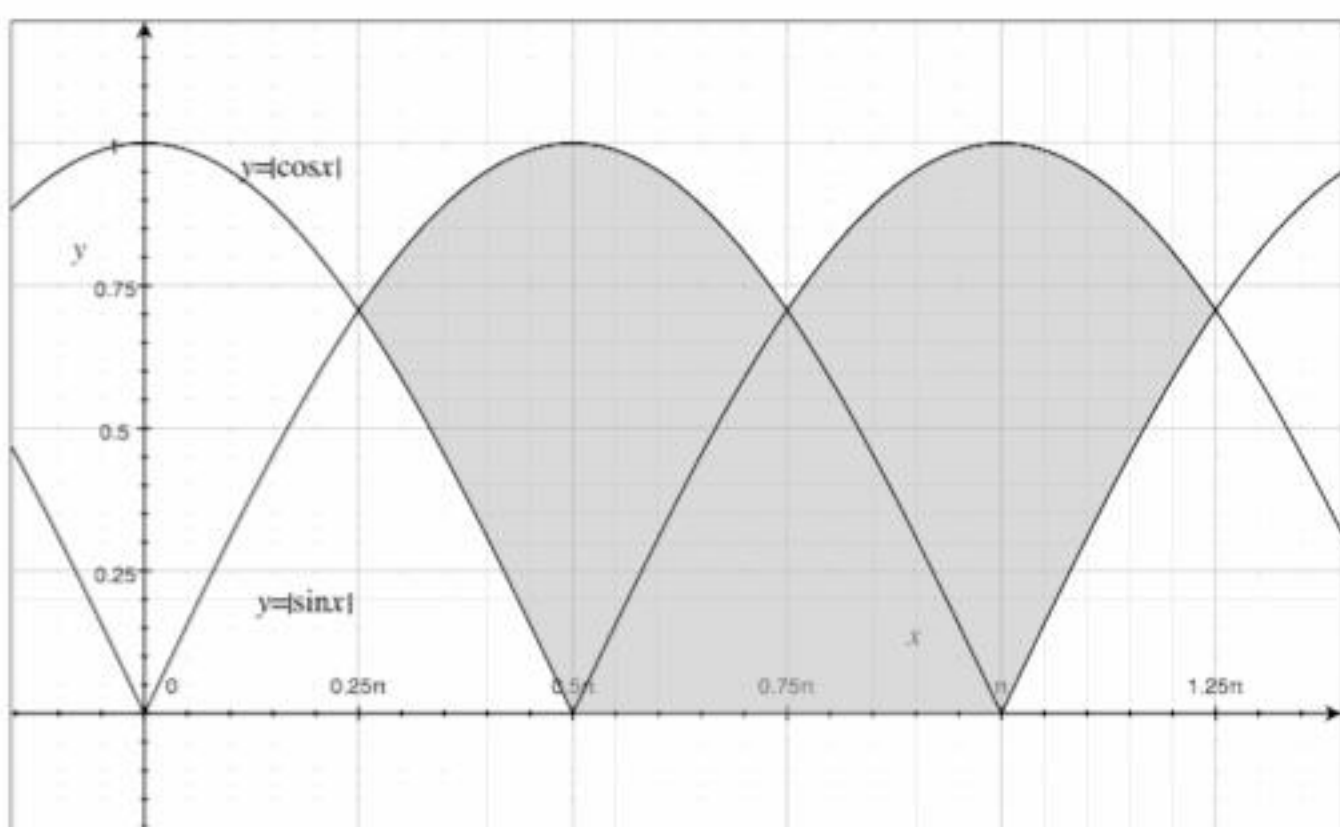
$$\frac{3}{4}\pi < x < \frac{5}{4}\pi \text{ のとき、} |\sin x| < |\cos x|$$

$$x = \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \text{ のとき、} |\sin x| = |\cos x|$$

- (3) (2)の答を用い、求める立体が $x = \frac{3}{4}\pi$ に関して対称であることに注意すると、

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \pi \sin^2 x \, dx - 2 \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \pi \cos^2 x \, dx \\ &= \pi \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} (1 - \cos 2x) \, dx - \pi \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (1 + \cos 2x) \, dx \\ &= \pi \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} - \pi \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \\ &= \frac{1}{4}\pi (\pi + 6) \end{aligned}$$

(答) $\frac{1}{4}\pi (\pi + 6)$



- (1) A は原点中心に反時計回りに 72° 回転する変換行列なので、
 A^5 は原点中心に 360° 回転する変換行列、すなわち単位行列 E に等しい。
 A と E が可換であることに注意して計算すると

$$(A - E)(A^4 + A^3 + A^2 + A + E) = A^5 - E = O \quad (\because A^5 = E)$$

(証明終)

- (2) $A - E = \begin{pmatrix} \cos 72^\circ - 1 & -\sin 72^\circ \\ \sin 72^\circ & \cos 72^\circ - 1 \end{pmatrix}$ の行列式は、

$$\begin{aligned} (\cos 72^\circ - 1)^2 + \sin^2 72^\circ &= \cos^2 72^\circ - 2\cos 72^\circ + 1 + \sin^2 72^\circ \\ &= 2(1 - \cos 72^\circ) \neq 0 \end{aligned}$$

であるから、 $A - E$ の逆行列 $(A - E)^{-1}$ が存在する。

$(A - E)(A^4 + A^3 + A^2 + A + E) = O$ の両辺に左から $(A - E)^{-1}$ をかければ、

$$A^4 + A^3 + A^2 + A + E = O$$

が成立する。

(証明終)

- (3) $B = A + A^{-1}$ とおくと、 $B^2 = A^2 + 2E + (A^{-1})^2$

$A^4 + A^3 + A^2 + A + E = O$ の両辺に左(または右)から A^{-1} を 2 回かけると、

$$A^2 + A + E + A^{-1} + (A^{-1})^2 = O$$

$$(A^2 + 2E + (A^{-1})^2) + (A + A^{-1}) - E = O$$

よって、 $B^2 + B - E = O$

(証明終)

- (4) 行列 A の行列式は、 $\cos^2 72^\circ + \sin^2 72^\circ = 1$ なので、 $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos 72^\circ & \sin 72^\circ \\ -\sin 72^\circ & \cos 72^\circ \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{よって } B &= \begin{pmatrix} \cos 72^\circ & -\sin 72^\circ \\ \sin 72^\circ & \cos 72^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 72^\circ & \sin 72^\circ \\ -\sin 72^\circ & \cos 72^\circ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cos 72^\circ & 0 \\ 0 & 2\cos 72^\circ \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(証明終)

- (5) $\alpha = \cos 72^\circ$ とおくと、 $B = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$ 、 $B^2 = \begin{pmatrix} 4\alpha^2 & 0 \\ 0 & 4\alpha^2 \end{pmatrix}$

$B^2 + B - E = O$ より、成分を計算すると

$$\begin{pmatrix} 4\alpha^2 & 0 \\ 0 & 4\alpha^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore 4\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$$

これを解くと、 $\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

$\alpha = \cos 72^\circ > 0$ ゆえ、 $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

$$(\text{答}) \quad \cos 72^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$