

(1)

線分 OP の垂直二等分線は 2 点 O, P の中点を通り、直線 OP と直交する。
よってその方程式は、

$$y - \frac{1}{2} = -2(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow y = -2x + \frac{5}{2}$$

同様に、線分 OQ の垂直二等分線の方程式は、

$$y - \left(-\frac{11}{10}\right) = -\frac{2}{11} \left\{ x - \left(-\frac{1}{5}\right) \right\}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{11}x - \frac{25}{22}$$

円の中心 G は 3 点 O, P, Q から等距離にある点である。その点はこの 2 直線の交点となるので、

$$\begin{cases} y = -2x + \frac{5}{2} \\ y = -\frac{2}{11}x - \frac{25}{22} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = \left(2, -\frac{3}{2}\right)$$

また、円 C_1 の半径を r とすれば

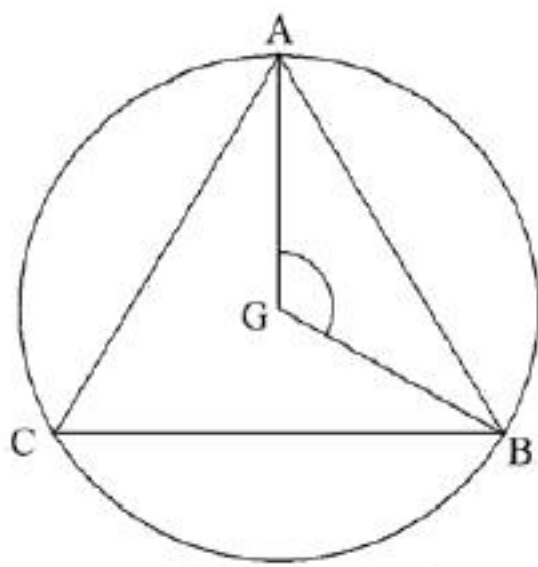
$$r = \sqrt{(2-0)^2 + \left(-\frac{3}{2}-0\right)^2} = \frac{5}{2}$$

以上より、円 C_1 の方程式は

$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$(\text{答}) (x-2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

(2)



円 C_1 の中心を G とし、 C_1 に内接する正三角形を $\triangle ABC$ とする。
このとき、中心角は円周角の 2 倍となるので

$$\angle AGB = \frac{\pi}{3} \times 2 = \frac{2\pi}{3}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= 3 \times \triangle AGB \\ &= 3 \times \left(\frac{1}{2} \times GA \times GB \times \sin \angle AGB \right) \\ &= 3 \times \left(\frac{1}{2} \times r \times r \times \sin \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2 \end{aligned}$$

ここで、 r は円 C_1 の半径だから、

$$r = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

以上より、

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{3\sqrt{3}}{4} \left(\frac{5}{2} \right)^2 \\ &= \frac{75\sqrt{3}}{16} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \frac{75\sqrt{3}}{16}$$

(3)

点 M の座標を (x, y) 、 $\triangle MPQ$ の重心を H とおき、その座標を (X, Y) とすると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= (X, Y) \\ &= \frac{1}{3} (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ (x, y) + (2, 1) + \left(-\frac{2}{5}, -\frac{11}{5}\right) \right\} \\ &= \left(\frac{1}{3} \left(x + \frac{8}{5}\right), \frac{1}{3} \left(y - \frac{6}{5}\right) \right) \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{cases} X = \frac{1}{3} \left(x + \frac{8}{5}\right) \\ Y = \frac{1}{3} \left(y - \frac{6}{5}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3X - \frac{8}{5} \\ y = 3Y + \frac{6}{5} \end{cases}$$

この (x, y) は、 $x^2 + y^2 = 5$ を満たすから、

$$\begin{aligned} \left(3X - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(3Y + \frac{6}{5}\right)^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow \left(X - \frac{8}{15}\right)^2 + \left(Y + \frac{2}{5}\right)^2 &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

ゆえに、 $\triangle MPQ$ の重心の軌跡は、

$$\left(X - \frac{8}{15}\right)^2 + \left(Y + \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

の中にある。ただし、3 点 M, P, Q は三角形を作るので、点 M は点 P 、点 Q と異なる点である。

点 M が点 P と重なるのは、

$$\begin{cases} x = 3X - \frac{8}{5} = 2 \\ y = 3Y + \frac{6}{5} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{6}{5} \\ Y = -\frac{1}{15} \end{cases}$$

のとき、同様に点 M が点 Q と重なるのは、

$$\begin{cases} x = 3X - \frac{8}{5} = -\frac{2}{5} \\ y = 3Y + \frac{6}{5} = -\frac{11}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{2}{5} \\ Y = -\frac{17}{15} \end{cases}$$

のときである。以上より、求める答えは

$$(\text{答}) \left(X - \frac{8}{15}\right)^2 + \left(Y + \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{5}{9}, \text{ただし } (X, Y) \neq \left(\frac{6}{5}, -\frac{1}{15}\right), \left(\frac{2}{5}, -\frac{17}{15}\right)$$

(1)

食塩水全体の質量を x とおく。このとき濃度が $a\%$ だから食塩の質量は、

$$x \times \frac{a}{100}$$

食塩水の10分の1を捨て、代わりに同じ質量の真水を加えると全体の質量は変わらず食塩の質量だけが10分の1減るのでその濃度は、

$$\frac{x \times \frac{a}{100} \times \left(1 - \frac{1}{10}\right)}{x} \times 100\% = \frac{9}{10} a\%$$

$$(\text{答}) \frac{9}{10} a\%$$

(2)

(1)の操作を n 回繰り返してできる食塩水の濃度を $a_n\%$ とする、(ただし $a_0 = a$ であるとする。)このとき、(1)と同様に

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{9}{10} a_{n-1} \\ &= \left(\frac{9}{10}\right)^n a_0 \\ &= \left(\frac{9}{10}\right)^n a \end{aligned}$$

したがって、求める食塩水の濃度は、

$$\left(\frac{9}{10}\right)^n a\%$$

$$(\text{答}) \left(\frac{9}{10}\right)^n a\%$$

(3)

もとめる n は以下の条件を満たす。

$$\begin{cases} a_{n-1} = \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} a > \frac{a}{10} \\ a_n = \left(\frac{9}{10}\right)^n a \leq \frac{a}{10} \end{cases}$$

ここで、 $\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} a > \frac{a}{10}$ を両辺 a で割り10を底とする対数をとると、

$$(n-1)(2\log_{10} 3 - 1) > -1$$

整理して、

$$n < 1 - \frac{1}{2\log_{10} 3 - 1} < 1 - \frac{1}{2 \times 0.4772 - 1} = 1 + \frac{1}{0.0456} = 22.9 \dots < 23$$

同様に、 $a_n = \left(\frac{9}{10}\right)^n a \leq \frac{a}{10}$ から

$$n(2\log_{10} 3 - 1) \leq -1$$

これより

$$n \geq \frac{1}{1 - 2\log_{10} 3} > \frac{1}{0.0456} = 21.9 \dots > 21$$

この二つの条件より、 n は整数なので、

$$n = 22$$

$$(\text{答}) n = 22$$

(1)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OB} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}) \\
&= (3, 2, 1) \\
\overrightarrow{A_1B} &= (3, 2, 1) - (1, 1, 1) = (2, 1, 0) \\
\overrightarrow{A_2B} &= (3, 2, 1) - (2, 3, 1) = (1, -1, 0) \\
\text{より, } \angle A_1BA_2 &= \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \text{ とすれば,} \\
\cos \theta &= \frac{\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{A_2B}}{|\overrightarrow{A_1B}| |\overrightarrow{A_2B}|} = \frac{2-1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \\
\sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{3}{\sqrt{10}}
\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
\triangle A_1A_2B &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1B}| \cdot |\overrightarrow{A_2B}| \sin \theta \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$(\text{答}) \triangle A_1A_2B = \frac{3}{2}$$

(2)

四面体 $A_1A_2A_3B$, 四面体 $A_1A_2A_4B$ の面積をそれぞれ V_1, V_2 とする。(1)より点 A_1, A_2, B は $z=1$ 平面上にある。四面体 $A_1A_2A_3B$, 四面体 $A_1A_2A_4B$ は $\triangle A_1A_2B$ を底面と見ると, 高さはそれぞれ平面 $z=1$ と点 A_3, A_4 との距離である。

よって求める面積は

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot |2-1| \\
&= \frac{1}{2} \\
V_2 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot |0-1| \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

よって四面体 $A_1A_2A_3B$, 四面体 $A_1A_2A_4B$ の面積はともに

$$\frac{1}{2}$$

$$(\text{答}) \text{ 四面体 } A_1A_2A_3B \text{ の面積: } \frac{1}{2}, \text{ 四面体 } A_1A_2A_4B \text{ の面積: } \frac{1}{2}$$

(3)

2つの実数 x, y を用いて

$$\overrightarrow{A_1P} = x \overrightarrow{A_1A_2} + y \overrightarrow{A_1B}$$

と表せるとする。このとき

$$\begin{aligned}
x \overrightarrow{A_1A_2} + y \overrightarrow{A_1B} &= x(1, 2, 0) + y(2, 1, 0) \\
&= ((x+2y), (2x+y), 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A_1P} &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}) - \overrightarrow{OA_1} \\
&= \left(\frac{5}{4}, 1, 0 \right)
\end{aligned}$$

より, $\overrightarrow{A_1A_2}$ と $\overrightarrow{A_1B}$ は一次独立なので,

$$\begin{cases} x+2y = \frac{5}{4} \\ 2x+y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{A_1P} = \frac{1}{4} \overrightarrow{A_1A_2} + \frac{1}{2} \overrightarrow{A_1B} \cdots \textcircled{1}$$

平面 A_1A_2B 上の任意の点を Q とすると, $\overrightarrow{A_1Q}$ は $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1B}$ の一次結合で表される。よって①より A_1, A_2, B, P は同一平面上にある。

(証明終)

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{A_1P} = \frac{1}{4} \overrightarrow{A_1A_2} + \frac{1}{2} \overrightarrow{A_1B}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OC} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}) = \left(\frac{3}{2}, 2, 1 \right) \\
\overrightarrow{A_3A_4} &= \overrightarrow{OA_4} - \overrightarrow{OA_3} = (2, 0, -2) \\
\overrightarrow{A_3C} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA_3} = \left(-\frac{1}{2}, 0, -1 \right) \\
\overrightarrow{A_3P} &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}) - \overrightarrow{OA_3} = \left(\frac{1}{4}, 0, -1 \right)
\end{aligned}$$

これより

$$\frac{1}{4} \overrightarrow{A_3A_4} + \frac{1}{2} \overrightarrow{A_3C} = \overrightarrow{A_3P} \cdots \textcircled{2}$$

より, $\overrightarrow{A_3A_4}$ と $\overrightarrow{A_3C}$ は一次独立なので,平面 A_3A_4C 上の任意の点を R とすると, $\overrightarrow{A_3R}$ は $\overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_3C}$ の一次結合で表される。よって, ②より4点 A_3, A_4, C, P は同一平面上にある。

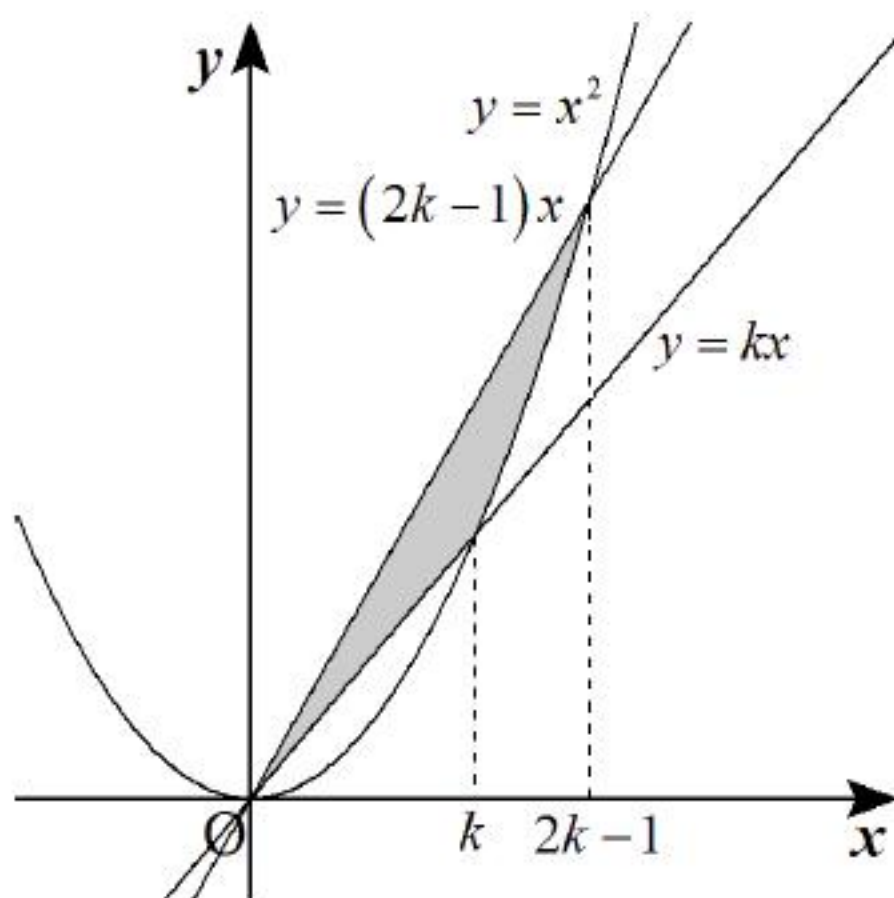
(証明終)

(1)

直線 $y=kx$ と放物線 $y=x^2$ の交点の x 座標は、 $x=0, k$

直線 $y=(2k-1)x$ と放物線 $y=x^2$ の交点の x 座標は、 $x=0, 2k-1$

ゆえに、2 直線と放物線のグラフは次図のようになる。



よって求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times (2k-1) \times (2k-1)^2 - \frac{1}{2} \times k \times k^2 - \int_k^{2k-1} x^2 dx \\ &= \frac{1}{6} (k-1) (7k^2 - 5k + 1) \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{6} (k-1) (7k^2 - 5k + 1)$$

(2)

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dk} &= \frac{1}{2} (7k^2 - 8k + 2) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 7 \left(k - \frac{4}{7} \right)^2 - \frac{2}{7} \right\} \end{aligned}$$

ここで $k > 1$ なので

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dk} &> \frac{1}{2} \left\{ 7 \left(1 - \frac{4}{7} \right)^2 - \frac{2}{7} \right\} \\ &= \frac{1}{2} > 0 \end{aligned}$$

ゆえに S は k に関して単調に増加する。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned} 6S &= (k-1) (7k^2 - 5k + 1) \\ 6k^3 - 7k^2 + 1 &= (k-1) (6k^2 - k - 1) \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} 6S &< 6k^3 - 7k^2 + 1 \\ \Leftrightarrow (k-1) (k^2 - 4k + 2) &< 0 \\ \Leftrightarrow (k-1) \{ k - (2+\sqrt{2}) \} \{ k - (2-\sqrt{2}) \} &< 0 \end{aligned}$$

ここで $2-\sqrt{2} < 1 < k$ より、 $1 < k < 2+\sqrt{2}$

ゆえに $6S < 6k^3 - 7k^2 + 1$ が成り立つような k の値の範囲は、

$$1 < k < 2+\sqrt{2}$$

$$(\text{答}) \quad 1 < k < 2+\sqrt{2}$$