

前期日程

平成 21 年度入学試験問題（前期日程）

数 学

（理 工 学 部）

—— 解 答 上 の 注 意 事 項 ——

- 1 「解答始め」の合図があるまで問題を見てはならない。
- 2 「解答始め」の合図があったら、初めにすべての解答紙の所定欄に受験番号を記入すること。
受験番号は算用数字で横書きとする。
- 3 問題冊子 1 冊と解答冊子 1 冊(解答紙 4 枚および計算紙 1 枚)がある。
- 4 問題は

1

 から

4

 まで 4 問ある。各問の解答は所定の解答紙に記入すること。
- 5 解答しない問題がある場合でも、解答紙 4 枚すべてを提出すること。
- 6 問題冊子は持ち帰ること。

1 等差数列 $\{a_n\}$ は, $a_5 = 14$, $a_{10} = 29$ を満たすとする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) $\sum_{k=1}^n 2^{-a_k}$ を求めよ。

(3) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ を求めよ。

(4) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-a_k}$ および $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ を求めよ。

2 $x > 1$ において $f(x) = \sqrt{x} - \log x$, $g(x) = \frac{x}{\log x}$ とするとき, 次の問いに答えよ。(ただし, 対数は自然対数とする。)

(1) $f(x) > 0$ を示せ。

(2) $g(x) > \sqrt{x}$ を示せ。これを用いて, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ を示せ。

(3) $g'(x)$, $g''(x)$ を計算し, $g(x)$ の極値, 変曲点の座標を求めよ。

(4) 関数 $y = g(x)$ のグラフをかけ。

3

次の問いに答えよ。

(1) 2つの曲線 $y = \sin x$, $y = \cos x$ $\left(\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}\right)$ で囲まれた図形 D の面積 S を求めよ。

(2) 区間 $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$ における, $|\sin x|$ と $|\cos x|$ の大小関係を述べよ。

(3) (1)の図形 D を x 軸の回りに一回転してできる立体の体積 V を求めよ。

4 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos 72^\circ & -\sin 72^\circ \\ \sin 72^\circ & \cos 72^\circ \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。ただし、

E は 2 次の単位行列とし、 O は 2 次の零行列とする。

(1) $(A - E)(A^4 + A^3 + A^2 + A + E) = O$ を示せ。

(2) $A - E$ が逆行列を持つことを示せ。これを用いて、

$$A^4 + A^3 + A^2 + A + E = O$$

を示せ。

(3) $B = A + A^{-1}$ とおく。(2)を用いて、 $B^2 + B - E = O$ を示せ。

(4) (3)の行列 B について、 $B = \begin{pmatrix} 2 \cos 72^\circ & 0 \\ 0 & 2 \cos 72^\circ \end{pmatrix}$ を示せ。

(5) $\alpha = \cos 72^\circ$ とおくとき、(3)と(4)を用いて、 $4\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$ が成り立つことを示せ。さらに $\cos 72^\circ$ の値を求めよ。