

(1)

加法定理を用いると、

$$\begin{aligned} & \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta \\ &= \left(\cos k\theta \cos \frac{\theta}{2} + \sin k\theta \sin \frac{\theta}{2}\right) - \left(\cos k\theta \cos \frac{\theta}{2} - \sin k\theta \sin \frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2\sin k\theta \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

となるので、等式は示された。

(証明終)

(2)

[1] $\sin \frac{\theta}{2} = 0$, すなわち, $\theta = 2N\pi$ (N は整数) のとき

$$\sin k\theta = \sin 2kN\pi = 0$$

なので、

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sin k\theta = \sum_{k=1}^n 0 = 0$$

である。

[2] $\theta \neq 2N\pi$ のとき

(1)より、

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2\sin \frac{\theta}{2}} \sum_{k=1}^n \left\{ \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta \right\} \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{\theta}{2}} \left\{ \cos\left(1-\frac{1}{2}\right)\theta - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta \right\} \\ &= \frac{\cos \frac{\theta}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

が得られる。

以上[1], [2]より、

$$S_n = \begin{cases} 0 & (\theta = 2N\pi) \\ \frac{\cos \frac{\theta}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin \frac{\theta}{2}} & (\theta \neq 2N\pi) \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_n = \begin{cases} 0 & (\theta = 2N\pi) \\ \frac{\cos \frac{\theta}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin \frac{\theta}{2}} & (\theta \neq 2N\pi) \end{cases}$$

(N は整数)

(1)

(i)

$$\begin{aligned}
 {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r &= \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!r!} \\
 &= \frac{r}{n} \frac{n!}{(n-r)!r!} + \frac{n-r}{n} \frac{n!}{(n-r)!r!} \\
 &= \frac{n!}{(n-r)!r!} \\
 &= {}_nC_r
 \end{aligned}$$

となるので、等式が示された。

(証明終)

(ii)

(i)で示した等式を用いると、

$$\begin{aligned}
 {}_nC_r &= {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r \\
 {}_{n-1}C_r &= {}_{n-2}C_{r-1} + {}_{n-2}C_r
 \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
 {}_nC_r &= {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r \\
 &= {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-2}C_{r-1} + {}_{n-2}C_r
 \end{aligned}$$

となるので、等式が示された。

(証明終)

(iii)

(ii)と同様にすれば、

$$\begin{aligned}
 {}_nC_r &= {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r \\
 &= {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-2}C_{r-1} + {}_{n-2}C_r \\
 &= \cdots \\
 &= {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-2}C_{r-1} + \cdots + {}_rC_{r-1} + {}_rC_r \\
 &= \sum_{k=1}^{n-r} {}_{n-k}C_{r-1} + {}_rC_r
 \end{aligned}$$

となるので、等式が示された。

(証明終)

(2)

6種類のアイスクリームから、3種類のアイスクリームを選ぶ方法の総数は、

$${}_6C_3 \text{ (通り)}$$

であるが、(1) (iii)で示した等式を用いれば、この答案では、

$$\begin{aligned}
 {}_6C_3 &= {}_5C_2 + {}_4C_2 + {}_3C_2 + {}_3C_3 \\
 &= ({}_4C_1 + {}_3C_1 + {}_2C_1 + {}_2C_2) + ({}_3C_1 + {}_2C_1 + {}_2C_2) + ({}_2C_1 + {}_2C_2) + {}_3C_3 \\
 &= (4+3+2+1) + (3+2+1) + (2+1) + 1 \\
 &= 10+6+3+1 \\
 &= 20
 \end{aligned}$$

という計算を行っているとは解釈出来る。ここで、6種類のアイスクリームに a, b, c, d, e, f と名前を付ける。

[1] ${}_4C_1 + {}_3C_1 + {}_2C_1 + {}_2C_2$ について

${}_4C_1 + {}_3C_1 + {}_2C_1 + {}_2C_2$ は、まず1種類目に a を、2種類目に b を選び、3種類目は c, d, e, f から1種類を選ぶ場合の数 ${}_4C_1$ と、1種類目に a を、2種類目に c を選び、3種類目は d, e, f から1種類を選ぶ場合の数 ${}_3C_1$ と、1種類目に a を、2種類目に d を選び、3種類目は e, f から1種類を選ぶ場合の数 ${}_2C_1$ と、1種類目に a を、2種類目に e を選び、3種類目は f を選ぶ場合の数 $1 (= {}_2C_2)$ を順次足していく数に等しい。

[2] ${}_3C_1 + {}_2C_1 + {}_2C_2$ について

${}_3C_1 + {}_2C_1 + {}_2C_2$ は、まず1種類目に b を、2種類目に c を選び、3種類目は d, e, f から1種類を選ぶ場合の数 ${}_3C_1$ と、1種類目に b を、2種類目に d を選び、3種類目は e, f から1種類を選ぶ場合の数 ${}_2C_1$ と、1種類目に b を、2種類目に e を選び、3種類目は f を選ぶ場合の数 $1 (= {}_2C_2)$ を順次足していく数に等しい。

[3] ${}_2C_1 + {}_2C_2$ について

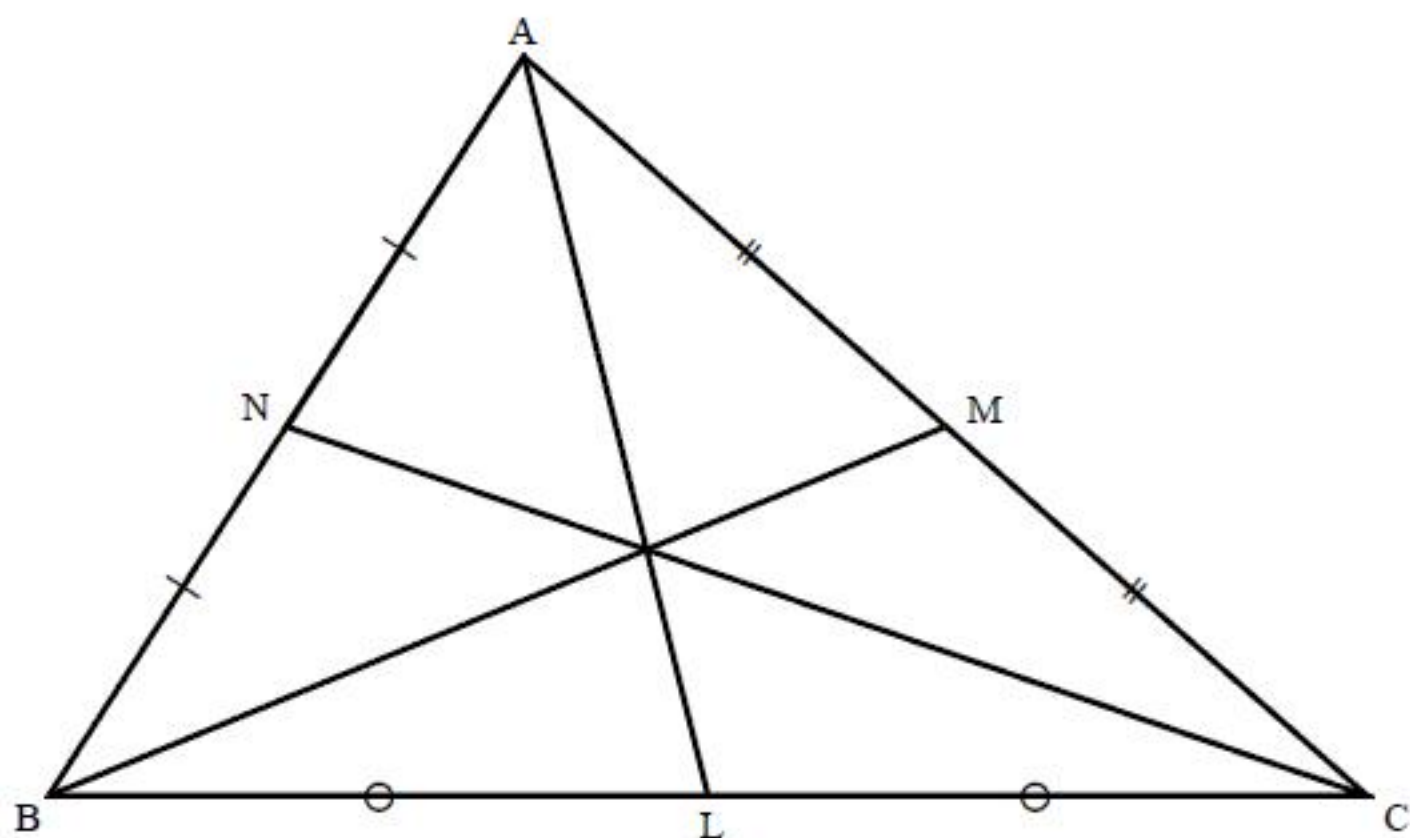
${}_2C_1 + {}_2C_2$ は、まず1種類目に c を、2種類目に d を選び、3種類目は e, f から1種類を選ぶ場合の数 ${}_2C_1$ と、1種類目に c を、2種類目に e を選び、3種類目は f を選ぶ場合の数 $1 (= {}_2C_2)$ 足した数に等しい。

[4] ${}_3C_3$ について

${}_3C_3$ は、1種類目に d を、2種類目に e を選び、3種類目は f を選ぶ場合の数 $1 (= {}_3C_3)$ に等しい。

[1], [2], [3], [4]で考えたアイスクリームの選び方は全て異なるものである。したがって、この答案は、[1], [2], [3], [4]の数を全て足すという解答になっている。

(解説終)



図のように三角形 ABC があり, BC, CA, AB の中点をそれぞれ L, M, N とする。
中線 AL を $2:1$ に内分する点の位置ベクトルは,

$$\frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OL}}{3} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2 \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}}{3} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

と表される。同様にして, 中線 BM, CN を $2:1$ に内分する点の位置ベクトルは, それぞれ,

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OM}}{3} &= \frac{\overrightarrow{OB} + 2 \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2}}{3} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} \\ \frac{\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{ON}}{3} &= \frac{\overrightarrow{OC} + 2 \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}}{3} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} \end{aligned}$$

と求まる。よって, 3 中線は, 位置ベクトル $\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$ で表される 1 点で交わり, 各中線はその交点で $2:1$ に内分される。

$$f(x) = x^3 - (3p+2)x^2 + 8px$$

とおくと、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - (6p+4)x + 8p \\ &= (x-2p)(3x-4) \end{aligned}$$

となる。また、

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 1 - (3p+2) + 8p = 5p - 1$$

$$f(2p) = (2p)^3 - (3p+2)(2p)^2 + 8p \cdot 2p = -4p^3 + 8p^2$$

が得られる。

[1] $0 < 2p < 1$, すなわち, $0 < p < \frac{1}{2}$ のとき

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	$2p$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$-4p^3 + 8p^2$	$\searrow$	$5p - 1$

よって, $0 < p < \frac{1}{2}$ のときの $f(x)$ の最大値は $-4p^3 + 8p^2$ である。

最小値は, 0 と $5p - 1$ の小さい方なので, $0 < p < \frac{1}{5}$ のとき $5p - 1$, $\frac{1}{5} \leq p < \frac{1}{2}$ のとき 0

である。

[2] $\frac{1}{2} \leq p < 1$ のとき

$y(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	1
$f'(x)$		+	
$y(x)$	0	$\nearrow$	$5p - 1$

よって, $\frac{1}{2} \leq p < 1$ のときの最大値は $5p - 1$, 最小値は 0 である。

したがって, [1], [2] より,

最大値: $0 < p < \frac{1}{2}$ のとき $-4p^3 + 8p^2$, $\frac{1}{2} \leq p < 1$ のとき $5p - 1$

最小値: $0 < p < \frac{1}{5}$ のとき $5p - 1$, $\frac{1}{5} \leq p < 1$ のとき 0

である。

(答) 最大値: $0 < p < \frac{1}{2}$ のとき $-4p^3 + 8p^2$, $\frac{1}{2} \leq p < 1$ のとき $5p - 1$

最小値: $0 < p < \frac{1}{5}$ のとき $5p - 1$, $\frac{1}{5} \leq p < 1$ のとき 0