

1

(1)

$t=0$ のとき

$$\overrightarrow{OP} = (0, -2, 2\sqrt{3}), \overrightarrow{OQ} = (0, -3, 0)$$

となるから

$$\begin{aligned} \cos \angle POQ &= \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}|} \\ &= \frac{0 \cdot 0 - 2 \cdot (-3) + 2\sqrt{3} \cdot 0}{\sqrt{0^2 + (-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 0^2}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。 $0 \leq \angle POQ \leq \pi$ であるから

$$\angle POQ = \frac{\pi}{3}$$

となる。

$$(答) \angle POQ = \frac{\pi}{3}$$

(2)

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}| &= \sqrt{(-t)^2 + (t-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{2t^2 - 4t + 16} \\ &= \sqrt{2(t-1)^2 + 14} \end{aligned}$$

となるから、 $|\overrightarrow{OP}|$ は $t=1$ のとき最小値 $\sqrt{14}$ をとる。

$$(答) \sqrt{14} \quad (t=1 \text{ のとき})$$

(3)

4 点 O, A, P, Q が同一平面上にあるとき、実数 p, q を用いて

$$\overrightarrow{OA} = p\overrightarrow{OP} + q\overrightarrow{OQ}$$

と表される。このとき

$$(-4, 0, 4\sqrt{3}) = p(-t, t-2, 2\sqrt{3}) + q(t, t^2+t-3, 0)$$

となるから

$$\begin{cases} -4 = -pt + qt & \dots \textcircled{1} \\ 0 = p(t-2) + q(t^2+t-3) & \dots \textcircled{2} \\ 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}p & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

である。③より

$$p = 2 \quad \dots \textcircled{4}$$

となり、①、④より

$$\begin{aligned} -4 &= -2t + qt \\ \Leftrightarrow 2(t-2) &= qt & \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

である。さらに、②、④、⑤より

$$\begin{aligned} 0 &= qt + q(t^2+t-3) \\ \Leftrightarrow q(t+3)(t-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow q=0, t &= -3, 1 \end{aligned}$$

となる。ここで

$$q=0 \text{ のとき, ⑤より } t=2$$

$$t=-3 \text{ のとき, ⑤より } q=\frac{10}{3}$$

$$t=1 \text{ のとき, ⑤より } q=-2$$

であるから、4 点 O, A, P, Q が同一平面上にあるときの t の値は

$$t = -3, 1, 2$$

である。

$$(答) t = -3, 1, 2$$

2

(1)

線分 PQ の中点 $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$ が直線 $l: y = mx$ 上にあることから

$$\begin{aligned}\frac{y+y'}{2} &= m \cdot \frac{x+x'}{2} \\ \Leftrightarrow mx' - y' &= -mx + y\end{aligned}$$

となる。また、 $PQ \perp l$ であることより

$$\begin{aligned}\frac{y-y'}{x-x'} \cdot m &= -1 \\ \Leftrightarrow x' + my' &= x + my\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。ここで

$$\det \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix} = m^2 + 1 \neq 0$$

であるから、行列 $\begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ は逆行列をもつから、この逆行列を①の両辺に左からかけて

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{m^2 + 1} \begin{pmatrix} m & 1 \\ -1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{m^2 + 1} \begin{pmatrix} 1 - m^2 & 2m \\ 2m & m^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

が成り立つことは示された。

(証明終)

(2)

1 次変換 f, g を表す行列をそれぞれ T_f, T_g とおく。(1)の結果を用いて

$$T_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, T_g = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

となるから、合成変換 $g \circ f, f \circ g$ を表す行列をそれぞれ $T_{g \circ f}, T_{f \circ g}$ とおくと

$$\begin{aligned}T_{g \circ f} &= T_g T_f \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_{f \circ g} &= T_f T_g \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad g \circ f : \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad f \circ g : \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(3)

(2)の結果を用いて

$$\begin{aligned}T_{g \circ f} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{3} & -\sin \frac{4\pi}{3} \\ \sin \frac{4\pi}{3} & \cos \frac{4\pi}{3} \end{pmatrix} \\ T_{f \circ g} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるから、 $T_{g \circ f}$ は原点 O を中心とし、角 $\frac{4\pi}{3}$ だけ回転する 1 次変換を表す行列であり、 $T_{f \circ g}$

は原点 O を中心とし、角 $\frac{2\pi}{3}$ だけ回転する 1 次変換を表す行列である。

$$\text{(答)} \quad g \circ f : \frac{4\pi}{3}, \quad f \circ g : \frac{2\pi}{3}$$

(1)

 $f(x) = e^x$ とおくと

$$f'(x) = e^x$$

であるから、曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $A_0(0, 1)$ における接線の方程式は

$$y = f'(0)(x - 0) + 1$$

$$\Leftrightarrow y = x + 1$$

となる。よって、この接線と x 軸の交点を $B_1(b_1, 0)$ とすると

$$0 = b_1 + 1$$

$$\Leftrightarrow b_1 = -1$$

である。

(答) $b_1 = -1$

(2)

C 上の点 $A_n(b_n, e^{b_n})$ における接線の方程式は

$$y = f'(b_n)(x - b_n) + e^{b_n}$$

$$\Leftrightarrow y = e^{b_n}(x - b_n) + e^{b_n}$$

となるから、この接線と x 軸の交点 $B_{n+1}(b_{n+1}, 0)$ について

$$0 = e^{b_n}(b_{n+1} - b_n) + e^{b_n}$$

$$\Leftrightarrow 0 = b_{n+1} - b_n + 1 \quad (\because e^{b_n} > 0)$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} = b_n - 1$$

が成り立つ。よって、数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = -1$ 、公差 -1 の等差数列であるから

$$b_n = b_1 - (n - 1)$$

$$= -n$$

となる。

(答) $b_{n+1} = b_n - 1, b_n = -n$

(3)

(2)の結果を用いて、点 A_n, B_n, B_{n+1} の座標はそれぞれ

$$A_n(-n, e^{-n}), B_n(-n, 0), B_{n+1}(-n-1, 0)$$

であり、点 B_0 は原点であることよりこれは $n=0$ でも成り立つ。よって

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot B_n B_{n+1} \cdot A_n B_n$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot e^{b_n}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot e^{-n}$$

$$= \frac{e^{-n}}{2}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} S_n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - e^{-1}} \quad (\because |e^{-1}| < 1) \\ &= \frac{e}{2(e-1)} \end{aligned}$$

である。

(答) $\sum_{n=0}^{\infty} S_n = \frac{e}{2(e-1)}$

(1)

 $f(x) = ax^2 + b, g(x) = c \log x$ とおくと

$$f'(x) = 2ax$$

$$g'(x) = \frac{c}{x}$$

である。 C_1, C_2 が点 $P(e, e)$ で接しているとき、 C_1, C_2 がともに点 P を通ることから

$$\begin{cases} f(e) = e \\ g(e) = e \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ae^2 + b = e \\ c \log e = e \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ae^2 + b = e & \dots\dots ① \\ c = e & \dots\dots ② \end{cases}$$

が成り立ち、また、 C_1, C_2 の点 P における接線が一致することから

$$f'(e) = g'(e)$$

$$\Leftrightarrow 2ae = \frac{c}{e} \quad \dots\dots ③$$

である。②、③より

$$2ae = \frac{e}{e}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2e}$$

であり、①より

$$\frac{1}{2e} \cdot e^2 + b = e$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{e}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{1}{2e}, b = \frac{e}{2}, c = e$$

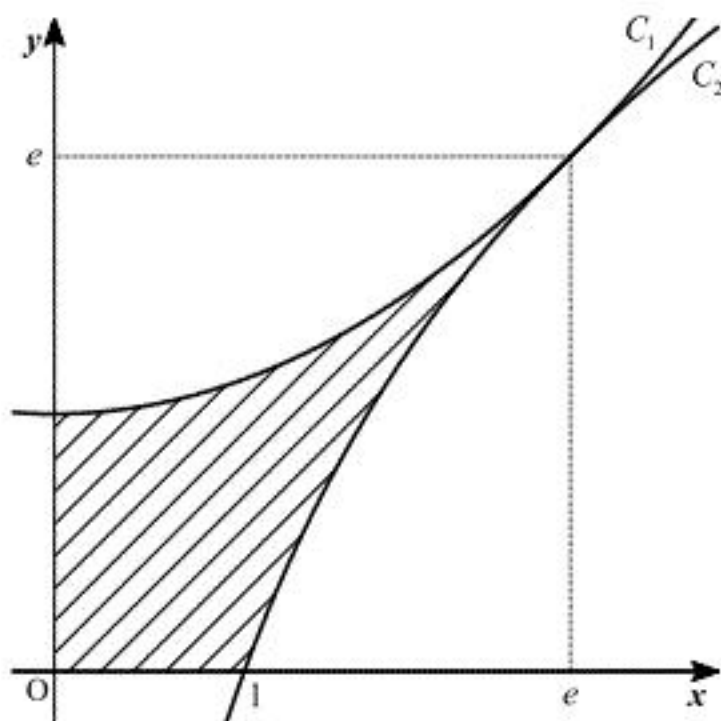
(2)

(1)の結果を用いて

$$f(x) = \frac{x^2}{2e} + \frac{e}{2}$$

$$g(x) = e \log x$$

となるから、 C_1, C_2 および x 軸、 y 軸とで囲まれた図形は下図の斜線部のようになる。



よって、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^e f(x) dx - \int_1^e g(x) dx &= \int_0^e \left(\frac{x^2}{2e} + \frac{e}{2} \right) dx - \int_1^e e \log x dx \\ &= \left[\frac{x^3}{6e} + \frac{e}{2}x \right]_0^e - e[x \log x - x]_1^e \\ &= \frac{e^2}{6} + \frac{e^2}{2} - e\{e - (e-1)\} \\ &= \frac{2e^2}{3} - e \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{2e^2}{3} - e$$