

1

(1)

$$a_{n+1} + b = 2(a_n + b) \Leftrightarrow a_{n+1} = 2a_n + b$$

これが $a_{n+1} = 2a_n + 2$ と恒等的に等しくなるので、 $b = 2$ である。

(答) $b = 2$

(2)

(1)より,

$$a_{n+1} + 2 = 2(a_n + 2)$$

が得られるので,

$$a_n + 2 = 2^{n-1}(a_1 + 2) = (2 + 2) \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow a_n = 2^{n+1} - 2$$

となる。

(答) $a_n = 2^{n+1} - 2$

(3)

(2)より,

$$\frac{a_{2n}}{a_n} = \frac{2^{2n+1} - 2}{2^{n+1} - 2} = \frac{2^{2n} - 1}{2^n - 1} = 2^n + 1$$

となるので,

$$\frac{a_{2n}}{a_n} \geq 10^{25} + 1$$

$$\Leftrightarrow 2^n + 1 \geq 10^{25} + 1$$

$$\Leftrightarrow 2^n \geq 10^{25}$$

$$\Leftrightarrow n \log_{10} 2 \geq 25$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{25}{\log_{10} 2} = \frac{25}{0.3010} = 83.05 \dots$$

であり、これを満たす最小の自然数 n は、 $n = 84$ である。

(答) $n = 84$

(1)

$$f(0^\circ) = A \sin \alpha = 1$$

$$f(90^\circ) = A \sin(\alpha + 90^\circ) = A \cos \alpha = 1$$

より,

$$(A \sin \alpha)^2 + (A \cos \alpha)^2 = 1^2 + 1^2$$

$$\Leftrightarrow A^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2$$

$$\Leftrightarrow A^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow A = \sqrt{2} \quad (\because A > 0)$$

である。また,

$$\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{1}{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となるので, $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ より, $\alpha = 45^\circ$ である。

$$(\text{答}) \quad A = \sqrt{2}, \quad \alpha = 45^\circ$$

(2)

(1)より,

$$f(\theta) = \sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ)$$

であるので,

$$\begin{aligned} f(\alpha + 30^\circ) &= f(45^\circ + 30^\circ) \\ &= f(75^\circ) \\ &= \sqrt{2} \sin(75^\circ + 45^\circ) \\ &= \sqrt{2} \sin(120^\circ) \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

であり, さらに,

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + 30^\circ) \cos(\alpha + 30^\circ) &= \frac{1}{2} \sin 2(\alpha + 30^\circ) \\ &= \frac{1}{2} \sin 2(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \frac{1}{2} \sin 150^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad f(\alpha + 30^\circ) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\sin(\alpha + 30^\circ) \cos(\alpha + 30^\circ) = \frac{1}{4}$$

(3)

(2)より,

$$g(\alpha + 30^\circ) = \sin(\alpha + 30^\circ) \cos(\alpha + 30^\circ) = \frac{1}{4}$$

よって,

$$\{f(\theta)\}^2 g(\theta) - k \{f(\theta)\}^2 = 2 \{g(\theta)\}^2 - 2k g(\theta) + g(\theta) - \frac{1}{4} \quad \cdots \textcircled{1}$$

に $\theta = \alpha + 30^\circ$ を代入し, $f(\alpha + 30^\circ) = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $g(\alpha + 30^\circ) = \frac{1}{4}$ を用いると,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} - k \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 &= 2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2k \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow k &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。これを①に代入すると,

$$\begin{aligned} \{f(\theta)\}^2 g(\theta) - \frac{1}{4} \{f(\theta)\}^2 &= 2 \{g(\theta)\}^2 - 2 \cdot \frac{1}{4} g(\theta) + g(\theta) - \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \left\{g(\theta) - \frac{1}{4}\right\} \left[g(\theta) - \frac{\{f(\theta)\}^2 - 1}{2}\right] &= 0 \\ \Leftrightarrow g(\theta) = \frac{1}{4}, \frac{\{f(\theta)\}^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\begin{aligned} \frac{\{f(\theta)\}^2 - 1}{2} &= \frac{2 \sin^2(\theta + 45^\circ) - 1}{2} \\ &= -\frac{\cos 2(\theta + 45^\circ)}{2} \\ &= -\frac{\cos(2\theta + 90^\circ)}{2} \\ &= \frac{\sin 2\theta}{2} \end{aligned}$$

となる。さらに, $\theta = \alpha + 30^\circ$ のとき,

$$\frac{\{f(\alpha + 30^\circ)\}^2 - 1}{2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 1}{2} = \frac{1}{4} = g(\alpha + 30^\circ)$$

を満たす。よって, $g(\theta)$ は $\frac{1}{4}$ または $\frac{\sin 2\theta}{2}$ を値に取る関数。

$$(\text{答}) \quad g(\theta) \text{ は } \frac{1}{4} \text{ または } \frac{\sin 2\theta}{2} \text{ を値に取る関数}$$

※ $g(\theta)$ が連続かどうかは不明である。仮に $g(\theta)$ が連続な関数ならば, $g(\theta)$ は

$$g(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{4} \\ \frac{\sin 2\theta}{2} \end{cases}$$

というように, 2 つの関数で与えられる。

(1)

$$y = -x^2 + 6x - 7 = -(x-3)^2 + 2$$

より、点 A の座標は (3, 2) である。

(答) (3, 2)

(2)

直線 l は点 (3, 2) と点 (1, -2) を通る直線なので、その方程式は、

$$y = \frac{2 - (-2)}{3 - 1}(x - 1) - 2 \Leftrightarrow y = 2x - 4$$

である。

(答) $y = 2x - 4$

(3)

放物線 $y = ax^2 + bx + c$ が点 A, B を通るので、

$$\begin{cases} 2 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \\ -2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \end{cases}$$

である。この連立方程式を b, c について解くと、

$$b = -4a + 2$$

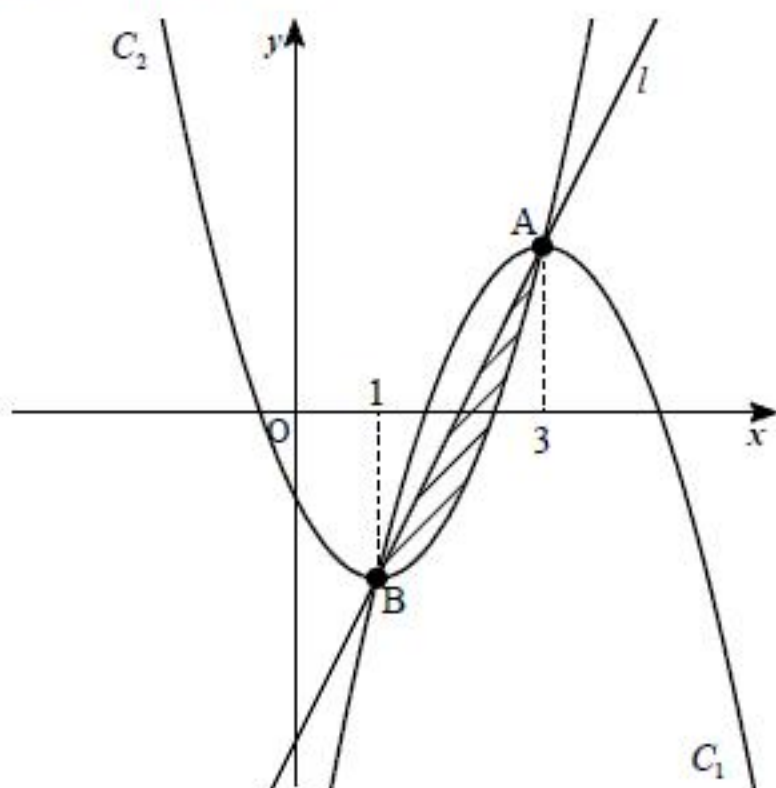
$$c = 3a - 4$$

である。

(答) $b = -4a + 2, c = 3a - 4$

(4)

求めるのは次図の斜線部の面積である。



よって、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_1^3 [(2x-4) - \{ax^2 + (-4a+2)x + (3a-4)\}] dx &= -a \int_1^3 (x-1)(x-3) dx \\ &= \frac{a}{6} (3-1)^3 \\ &= \frac{4}{3} a \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{4}{3}a$

(1)

 $t=0$ のとき,

$$\overline{OP} = (0, -2, 2\sqrt{3})$$

$$\overline{OQ} = (0, -3, 0)$$

なので,

$$\begin{aligned}\cos \angle POQ &= \frac{\overline{OP} \cdot \overline{OQ}}{|\overline{OP}| |\overline{OQ}|} \\ &= \frac{0 \cdot 0 - 2 \cdot (-3) + 2\sqrt{3} \cdot 0}{\sqrt{0^2 + (-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 0^2}} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。よって,

$$\angle POQ = \frac{\pi}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \angle POQ = \frac{\pi}{3}$$

(2)

$$\begin{aligned}|\overline{OP}| &= \sqrt{(-t)^2 + (t-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{2t^2 - 4t + 16} \\ &= \sqrt{2(t-1)^2 + 14}\end{aligned}$$

となるので, $|\overline{OP}|$ は $t=1$ のとき, 最小値 $\sqrt{14}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{14} \quad (t=1)$$

(3)

4 点 O, A, P, Q が同一平面上にあるとき, $\overline{OA}$ は実数 p, q を用いて,

$$\overline{OA} = p\overline{OP} + q\overline{OQ}$$

と表せる。よって, このとき,

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} -t \\ t-2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} t \\ t^2+t-3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので,

$$\begin{cases} -4 = -pt + qt & \dots \textcircled{1} \\ 0 = p(t-2) + q(t^2+t-3) & \dots \textcircled{2} \\ 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}p & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

である。③より,

$$p = 2$$

これを①に代入すると,

$$-4 = -2t + qt \Leftrightarrow 2(t-2) = qt$$

となる。さらに, これと $p=2$ を②に代入して,

$$\begin{aligned}0 &= qt + q(t^2+t-3) \\ &\Leftrightarrow q(t+3)(t-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow q=0, t=-3, 1\end{aligned}$$

となる。 $q=0$ のとき, これと①とから,

$$-4 = -2t + 0 \cdot t \Leftrightarrow t = 2$$

である。以上から, 求める t の値は,

$$t = -3, 1, 2$$

である。

$$(\text{答}) \quad t = -3, 1, 2$$