

1

(1)

$\triangle OAB$ は正三角形であるから、点 B は平面 xy における線分 AB の垂直二等分線上にある。すなわち、

$$b_1 = \frac{1}{2}$$

である。

$$OA = 1, b_2 > 0, \angle BOA = 60^\circ$$

より、

$$b_2 = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

と求まる。 $\triangle OAB$ の重心を G とすると、

$$G\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right)$$

である。点 C は $\triangle OAB$ と垂直で点 G を通る直線上にあるから、

$$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

となる。正四面体であるから、 $OC = OA = 1$ となるので、 $c_3 > 0$ より、

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + c_3^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow c_3^2 = \frac{2}{3}$$

$$\therefore c_3 = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (\because c_3 > 0)$$

以上より、

$$b_2 = \frac{1}{2}, b_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}, c_3 = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad b_2 = \frac{1}{2}, b_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}, c_3 = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(2)

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

より、

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} = 0$$

と求まる。したがって、 $|\overrightarrow{OA}| \neq 0, |\overrightarrow{BC}| \neq 0$ より $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直である。

(証明終)

(3)

実数 p を用いて $\overrightarrow{OP}$ は、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + p \overrightarrow{BC}$$

とおける。

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OB} + p \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BC} + p |\overrightarrow{BC}|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow p = -\frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|^2}$$

$$= -\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}}$$
$$= \frac{1}{2}$$

と求まる。よって、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

と求まる。したがって、

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

となるので、

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

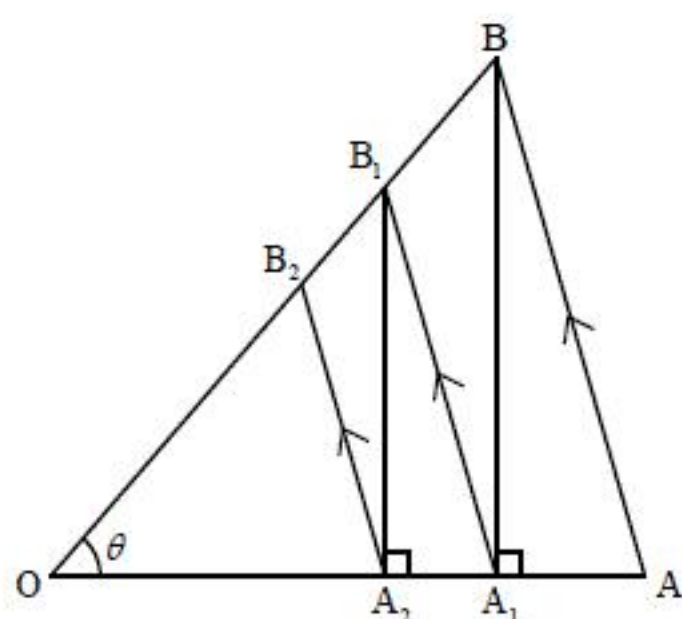
より、 $|\overrightarrow{AP}| \neq 0, |\overrightarrow{BC}| \neq 0$ より $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であることが示された。

(証明終)

$$(\text{答}) \quad P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

2

(1)



条件より、 $n \geq 2$ のとき、

$$A_n B_n \parallel A_{n-1} B_{n-1}$$

であり、また、

$$AB \parallel A_1 B_1$$

より、帰納的に、

$$A_n B_n \parallel AB$$

であることが分かる。これは $n=1$ でも成り立つ。平行な 2 直線の同位角は等しいから、

$$\angle O A_n B_n = \angle O A B$$

$$\angle O B_n A_n = \angle O B A$$

である。また、

$$\angle A_n O B_n = \angle A O B$$

であるから、 $\triangle O A_n B_n$ 、 $\triangle O A B$ について 3 つの角が等しいので、

$$\triangle O A_n B_n \sim \triangle O A B$$

であることが示された。

(証明終)

(2)

$$OA : OB = a : b \quad \dots \textcircled{1}$$

である。(1)より $n \geq 1$ のとき $\triangle O A_n B_n \sim \triangle O A B$ なので、

$$OA_n : OB_n = OA : OB \quad \dots \textcircled{2}$$

であるから、①、②より、

$$OA_n : OB_n = a : b$$

$$\Leftrightarrow OB_n = \frac{b}{a} OA_n \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。また、(1)の図より $n \geq 1$ のとき、

$$OA_{n+1} = OB_n \cos \theta \quad \dots \textcircled{4}$$

であることが分かるので、③、④より、

$$OA_{n+1} = \left(\frac{b}{a} \cos \theta \right) OA_n \quad \dots \textcircled{5}$$

と求まる。 $\triangle O A_n B_n \sim \triangle O A B$ より、 $n \geq 2$ のとき、

$$\triangle O A_n B_n \sim \triangle O A_{n-1} B_{n-1}$$

であるから、

$$OA_n : A_n B_n = OA_{n-1} : A_{n-1} B_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OA_n}{OA_{n-1}} = \frac{A_n B_n}{A_{n-1} B_{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{A_n B_n}{A_{n-1} B_{n-1}} = \frac{b}{a} \cos \theta \quad (\because \textcircled{5})$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{A_n B_n}{A_{n-1} B_{n-1}} = \frac{b}{a} \cos \theta$$

(3)

(1)の結果より $n \geq 1$ のとき、 $\triangle O A_{n+1} B_{n+1} \sim \triangle O A_n B_n$ であるから、(2)の結果より、

$$OB_{n+1} = \left(\frac{b}{a} \cos \theta \right) OB_n$$

となる。よって、 $n \geq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{1}{2} OA_{n+1} \cdot OB_{n+1} \sin \theta \\ &= \left(\frac{b}{a} \cos \theta \right)^2 \frac{1}{2} OA_n \cdot OB_n \sin \theta \\ &= \left(\frac{b}{a} \cos \theta \right)^2 S_n \end{aligned}$$

であるから、

$$S_n = \left\{ \left(\frac{b}{a} \cos \theta \right)^2 \right\}^{n-1} \cdot S_1$$

となるため、

$$\sum_{k=1}^n S_k = \frac{1}{2} \sin \theta \cdot OA_1 \cdot OB_1 \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{b}{a} \cos \theta \right)^{2(k-1)} \quad \dots \textcircled{6}$$

となる。ここで、

$$OA_1 = OB \cos \theta = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

であり、③より、

$$OB_1 = \frac{b}{a} OA_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

であるから、これらを⑥に代入して、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n S_n &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{2(k-1)} \\ &= \frac{3}{32} \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{16} \right)^{k-1} \\ &= \frac{3}{32} \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{16} \right)^n}{1 - \frac{3}{16}} \\ &= \frac{3}{32} \cdot \frac{16}{13} \left\{ 1 - \left(\frac{3}{16} \right)^n \right\} \\ &= \frac{3}{26} \left\{ 1 - \left(\frac{3}{16} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{26} \left\{ 1 - \left(\frac{3}{16} \right)^n \right\}$$

3

(1)

底の条件より、 x は

$$\begin{aligned} x(1-x) &> 0 \\ \Leftrightarrow 0 < x < 1 \end{aligned}$$

を満たすことが必要である。また、 $0 < x < 1$ のとき、

$$x-x^2 = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

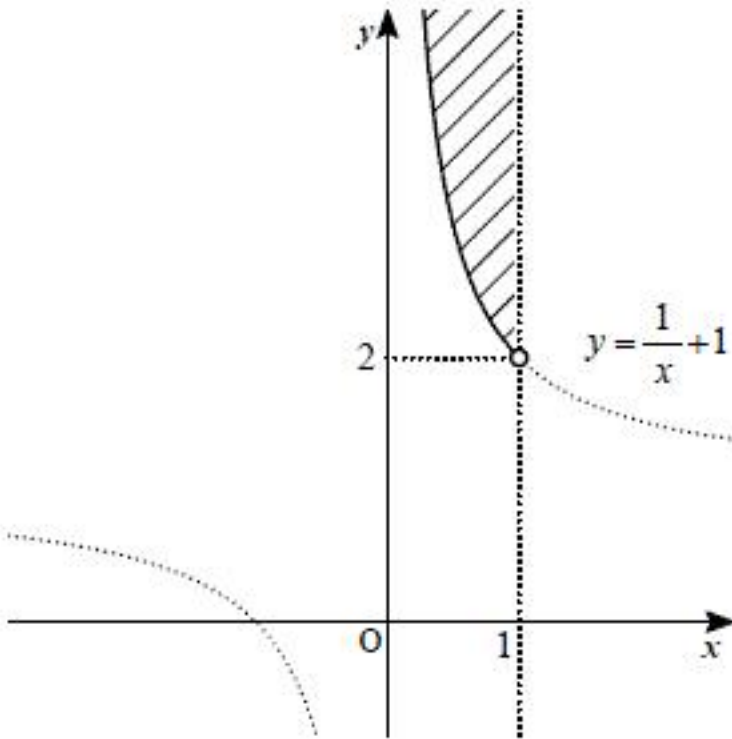
であるから、底 $x-x^2$ は

$$0 < x-x^2 \leq \frac{1}{4} < 1$$

を満たす。したがって、

$$\begin{aligned} \log_{x(1-x)}\{x(y-1)\} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \log_{x(1-x)}\{x(y-1)\} &\leq \log_{x(1-x)} 1 \\ \Leftrightarrow 0 < x < 1 \quad \text{かつ} \quad x(y-1) &\geq 1 \\ \Leftrightarrow 0 < x < 1 \quad \text{かつ} \quad y-1 &\geq \frac{1}{x} \\ \therefore 0 < x < 1 \quad \text{かつ} \quad y &\geq \frac{1}{x}+1 \end{aligned}$$

となる。以上より、 $\log_{x(1-x)}\{x(y-1)\} \leq 0$ を満たす領域は下図の斜線部である。(境界は $x=1$ の部分および白丸を除き、その他の境界部は含む)



(答) 前図参照

(2)

$2x+y=k$ とおくと、

$$y = -2x + k \quad \dots \textcircled{1}$$

と変形できる。 $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ とおくと、

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

であるから、 $y = \frac{1}{x} + 1$ の接線の傾き m は、 $0 < x < 1$ のとき、

$$m < -1$$

を満たす。したがって、(1)の図より、 $\textcircled{1}$ が $y = \frac{1}{x} + 1$ に接するとき、 k が最小となることが分かる。ここで、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x^2} &= -2 \\ \therefore x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\because 0 < x < 1) \end{aligned}$$

であり、接点の x 座標が $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のときの $y = \frac{1}{x} + 1$ の接線は、

$$\begin{aligned} y &= -2\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2} + 1 \\ &= -2x + 2\sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

であるから、 k の最小値は

$$2\sqrt{2} + 1$$

と求まる。

(答) $2\sqrt{2} + 1$

(1)

直線 ℓ_2 の方程式は,

$$\begin{aligned}\ell_2: y &= -\frac{1}{2a}(x-a) + a^2 \\ &= -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。点 $Q(X, Y)$ とおくと、点 Q は直線 ℓ_2 と $y = x^2$ の交点だから、 X は二次方程式

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2a}X + a^2 + \frac{1}{2} &= X^2 \\ X^2 + \frac{1}{2a}X - a^2 - \frac{1}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (X-a)\left(X+a+\frac{1}{2a}\right) &= 0\end{aligned}$$

の解である。ここで、 $X \neq a$ であるから、 X は

$$X = -a - \frac{1}{2a}$$

と求まる。よって、 Y は

$$Y = \left(-a - \frac{1}{2a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{4a^2} + 1$$

であるから、点 Q の座標は,

$$Q\left(-a - \frac{1}{2a}, a^2 + \frac{1}{4a^2} + 1\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad Q\left(-a - \frac{1}{2a}, a^2 + \frac{1}{4a^2} + 1\right)$$

(2)

放物線 C と直線 ℓ_2 で囲まれた部分の面積が S である。 $-a - \frac{1}{2a} < x < a$ において,

$-\frac{1}{2}x + a^2 + \frac{1}{2} > x^2$ であるから,

$$\begin{aligned}S &= \int_{-a-\frac{1}{2a}}^a \left\{ \left(-\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2} \right) - x^2 \right\} dx \\ &= -\int_{-a-\frac{1}{2a}}^a (x-a) \left(x+a+\frac{1}{2a} \right) dx \\ &= \frac{1}{6} \left(a + a + \frac{1}{2a} \right)^3 \\ &= \frac{1}{6} \left(2a + \frac{1}{2a} \right)^3\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{6} \left(2a + \frac{1}{2a} \right)^3$$

(3)

$a > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の大小関係より,

$$2a + \frac{1}{2a} \geq 2\sqrt{2a \cdot \frac{1}{2a}} = 2$$

である。(等号は $2a = \frac{1}{2a}$, すなわち $a = \frac{1}{2}$ のとき成立)

したがって,

$$S(a) = \frac{1}{6} \left(2a + \frac{1}{2a} \right)^3 \geq \frac{1}{6} \cdot 2^3 = \frac{4}{3} \quad (a = \frac{1}{2} \text{ のとき等号成立})$$

となるので、 $S(a)$ は、 $a = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{4}{3}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{4}{3} \quad (a = \frac{1}{2} \text{ のとき})$$