

1

(1)

$\triangle OAB$ は正三角形であるから、点 B は平面 xy における線分 AB の垂直二等分線上にある。すなわち、

$$b_1 = \frac{1}{2}$$

である。

$$OA = 1, b_2 > 0, \angle BOA = 60^\circ$$

より、

$$b_2 = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

と求まる。 $\triangle OAB$ の重心を G とすると、

$$G\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right)$$

である。点 C は $\triangle OAB$ と垂直で点 G を通る直線上にあるから、

$$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

となる。正四面体であるから、 $OC = OA = 1$ となるので、 $c_3 > 0$ より、

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + c_3^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow c_3^2 = \frac{2}{3}$$

$$\therefore c_3 = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (\because c_3 > 0)$$

以上より、

$$b_2 = \frac{1}{2}, b_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}, c_3 = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad b_2 = \frac{1}{2}, b_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}, c_3 = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(2)

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

より、

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} = 0$$

と求まる。したがって、 $|\overrightarrow{OA}| \neq 0, |\overrightarrow{BC}| \neq 0$ より $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直である。

(証明終)

(3)

実数 p を用いて $\overrightarrow{OP}$ は、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + p \overrightarrow{BC}$$

とおける。

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OB} + p \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BC} + p |\overrightarrow{BC}|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow p = -\frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|^2}$$

$$= -\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}}$$
$$= \frac{1}{2}$$

と求まる。よって、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

と求まる。したがって、

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

となるので、

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

より、 $|\overrightarrow{AP}| \neq 0, |\overrightarrow{BC}| \neq 0$ より $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であることが示された。

(証明終)

$$(\text{答}) \quad P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

(1)

$f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ より, $n \geq 1$ のとき, $f'_n(x)$ は $f_n(x)$, $f_{n-1}(x)$ を用いて,

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{1}{n!} (nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x}) \\ &= \frac{x^{n-1}e^{-x}}{(n-1)!} - \frac{x^n e^{-x}}{n!} \\ &= f_{n-1}(x) - f_n(x) \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad f'_n(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x) \quad (n \geq 1)$$

(2)

$$f'_0(x) = -e^{-x}$$

であるから, (1) の結果より,

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{k=0}^n f_k(x) \right\}' &= \sum_{k=0}^n f'_k(x) \\ &= f'_0(x) + \{f_0(x) - f_1(x)\} + \{f_1(x) - f_2(x)\} + \cdots + \{f_{n-1}(x) - f_n(x)\} \\ &= f'_0(x) + f_0(x) - f_n(x) \\ &= -e^{-x} + e^{-x} - \frac{x^n e^{-x}}{n!} \\ &= -\frac{x^n e^{-x}}{n!} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \left\{ \sum_{k=0}^n f_k(x) \right\}' = -\frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

(3)

(2) の結果より,

$$f_n(x) = -\left\{ \sum_{k=0}^n f_k(x) \right\}'$$

であるから, 定積分 $\int_0^1 f_n(x) dx$ の値は,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= -\int_0^1 \left\{ \sum_{k=0}^n f_k(x) \right\}' dx \\ &= -\sum_{k=0}^n \int_0^1 f'_k(x) dx \\ &= -\sum_{k=0}^n [f_k(x)]_0^1 \\ &= -\sum_{k=0}^n \frac{1^k e^{-1}}{k!} + f_0(0) \quad (\because k \geq 1 \text{ のとき, } f_k(0) = 0) \\ &= -\frac{1}{e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + 1 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \int_0^1 f_n(x) dx = -\frac{1}{e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + 1$$

(4)

$n \geq 1$ のとき, $0 < x < 1$ の範囲で, $f_n(x) > 0$ であるから,

$$\int_0^1 f_n(x) dx > 0$$

であることが分かる。したがって, (3) の結果より, $n \geq 1$ のとき,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= -\frac{1}{e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + 1 > 0 \\ \therefore e &> \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

であることが示された。

3

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \sin x \cos x - \tan x + 2x \\ &= \sin 2x - \tan x + 2x \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cos 2x - \frac{1}{\cos^2 x} + 2 \\ &= 2(2 \cos^2 x - 1) - \frac{1}{\cos^2 x} + 2 \\ &= 4 \cos^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} (4 \cos^4 x - 1) \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} (2 \cos^2 x - 1)(2 \cos^2 x + 1) \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} (\sqrt{2} \cos x + 1)(\sqrt{2} \cos x - 1)(2 \cos^2 x + 1) \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4} \text{ において、 } f'(x) > 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ において、 } f'(x) = 0$$

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3} \text{ において、 } f'(x) < 0$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{\pi}{6}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{3} < 0 \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 1 - 1 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \end{aligned}$$

より、 $f(x)$ の増減表は次のとおりである。

x	$-\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{3}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{3}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3}\pi$

ここで、 $\frac{\sqrt{3}}{3} < \pi$ より、

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} &< \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi \\ \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{3} &< -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

であるから、区間 $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ における $f(x)$ の最大値および最小値は、

$$\text{最大値: } \frac{\pi}{2} \quad (x = \frac{\pi}{4} \text{ のとき})$$

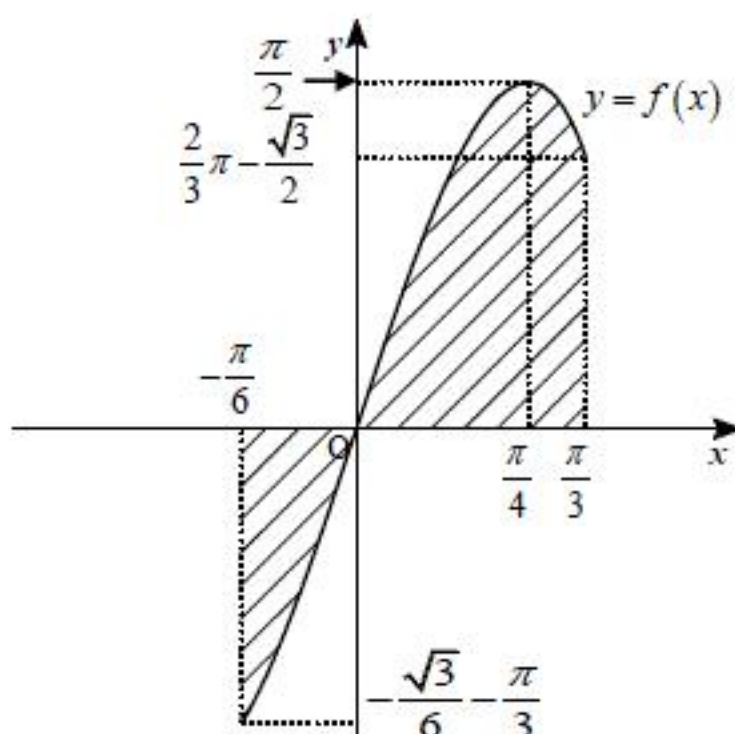
$$\text{最小値: } -\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{3} \quad (x = -\frac{\pi}{6} \text{ のとき})$$

となる。

$$(\text{答}) \text{ 最大値: } \frac{\pi}{2} \quad (x = \frac{\pi}{4} \text{ のとき}), \text{ 最小値: } -\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{3} \quad (x = -\frac{\pi}{6} \text{ のとき})$$

(2)

$f(0) = 0$ であることに注意すると、(1)における考察より $y = f(x)$ のグラフは以下の図のようになる。



求める面積の和を S とおくと、 S は上図の斜線部の面積であるから、

$$S = -\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$$

である。ここで、 $f(x)$ の原子関数は積分定数を C として、

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int (\sin 2x - \tan x + 2x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \cos 2x + \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx + x^2 \\ &= -\frac{1}{2} \cos 2x + \log |\cos x| + x^2 + C \end{aligned}$$

であるから、 S は

$$\begin{aligned} S &= -\left[-\frac{1}{2} \cos 2x + \log |\cos x| + x^2\right]_{-\frac{\pi}{6}}^0 + \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + \log |\cos x| + x^2\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi^2}{36} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{\pi^2}{9} + \log \frac{1}{2} \\ &= 1 + \log \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{5}{36} \pi^2 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S = 1 + \log \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{5}{36} \pi^2$$

(1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - bc & b(a-d) \\ -c(a-d) & d^2 - bc \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{aligned} & A^2 - (a-d)A - (ad-bc)E \\ &= \begin{pmatrix} a^2 - bc & b(a-d) \\ -c(a-d) & d^2 - bc \end{pmatrix} - (a-d) \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} - (ad-bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 - bc - a^2 + ad - ad + bc & b(a-d) - (a-d)b \\ -c(a-d) + (a-d)c & d^2 - bc + ad - d^2 - ad + bc \end{pmatrix} \\ &= O \end{aligned}$$

であることが示された。

(証明終)

(2)

$n \geq 2$ のとき、 $A^n = O$ が成り立つとする。このとき、 A が逆行列を持つと仮定すると、 $A^n = O$ の両辺に A^{-1} を n 回かけることで、

$$E = O$$

となり矛盾するから、 A は逆行列を持たないことが背理法によって示される。よって A の行列式について、

$$\begin{aligned} \Delta A &= 0 \\ \Leftrightarrow -ad + bc &= 0 \\ \Leftrightarrow ad - bc &= 0 \end{aligned}$$

であることが分かる。また、(1)より、

$$\begin{aligned} & A^2 - (a-d)A - (ad-bc)E = O \\ \Leftrightarrow & A^2 = (a-d)A + (ad-bc)E \end{aligned}$$

であるから、上式に $ad - bc = 0$ を代入すると、

$$A^2 = (a-d)A$$

となる。したがって、 $n \geq 2$ のとき、

$$A^n = (a-d)^{n-1} A$$

となり、問題文より、

$$A \neq O$$

であるから、 $A^n = O$ のとき、

$$\begin{aligned} a-d &= 0 \\ \therefore a &= d \end{aligned}$$

となる。以上より、 $A^n = O$ のとき、

$$ad = bc, a = d$$

となる。逆に、 $ad = bc, a = d$ のとき、(1)の結果より、

$$A^2 = O$$

であり、 $n \geq 3$ のときも

$$A^n = A^{n-2} A^2 = O$$

となるので、 $ad = bc, a = d$ のとき、

$$A^n = O$$

となる。よって、 $A^n = O$ が成り立つための必要十分条件は、 $ad = bc$ および $a = d$ が成り立つことであることが示された。

(証明終)

(3)

(2)で求めた条件を満たす (a, b, c, d) の組は、

$$(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 1), (2, 1, 4, 2), (2, 2, 2, 2), (2, 4, 1, 2), (3, 3, 3, 3), (4, 4, 4, 4), (5, 5, 5, 5), (6, 6, 6, 6)$$

である。したがって、求める確率は

$$\frac{8}{6^4} = \frac{1}{162}$$

である。

(答) $\frac{1}{162}$