

1

(1)

$\triangle OAB$ は正三角形であるから、点 B は平面 xy における線分 AB の垂直二等分線上にある。すなわち、

$$b_1 = \frac{1}{2}$$

である。

$$OA = 1, b_2 > 0, \angle BOA = 60^\circ$$

より、

$$b_2 = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

と求まる。 $\triangle OAB$ の重心を G とすると、

$$G\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right)$$

である。点 C は $\triangle OAB$ と垂直で点 G を通る直線上にあるから、

$$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

となる。正四面体であるから、 $OC = OA = 1$ となるので、 $c_3 > 0$ より、

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + c_3^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow c_3^2 = \frac{2}{3}$$

$$\therefore c_3 = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (\because c_3 > 0)$$

以上より、

$$b_2 = \frac{1}{2}, b_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}, c_3 = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad b_2 = \frac{1}{2}, b_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}, c_3 = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(2)

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

より、

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} = 0$$

と求まる。したがって、 $|\overrightarrow{OA}| \neq 0, |\overrightarrow{BC}| \neq 0$ より $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直である。

(証明終)

(3)

実数 p を用いて $\overrightarrow{OP}$ は、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + p \overrightarrow{BC}$$

とおける。

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OB} + p \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BC} + p |\overrightarrow{BC}|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow p = -\frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|^2}$$

$$= -\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}}$$
$$= \frac{1}{2}$$

と求まる。よって、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

と求まる。したがって、

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

となるので、

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

より、 $|\overrightarrow{AP}| \neq 0, |\overrightarrow{BC}| \neq 0$ より $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であることが示された。

(証明終)

$$(\text{答}) \quad P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

2

(1)

$n=1$ のとき,

$$S_1 = a_1$$

であるから,

$$\frac{a_1+3}{2} = \sqrt{3a_1} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。両辺を二乗して、 a_1 は

$$\begin{aligned} \frac{(a_1+3)^2}{4} &= 3a_1 \\ \Leftrightarrow a_1^2 + 6a_1 + 9 &= 12a_1 \\ \Leftrightarrow a_1^2 - 6a_1 + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a_1-3)^2 &= 0 \\ \therefore a_1 &= 3 \end{aligned}$$

であることが必要である。これは①式を満たすから、十分性も満たし、

$$a_1 = 3$$

である。

(答) $a_1 = 3$

(2)

問題文より,

$$\frac{a_{n+1}+3}{2} = \sqrt{3S_{n+1}} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。両辺二乗して、 a_{n+1} は,

$$\begin{aligned} \frac{(a_{n+1}+3)^2}{4} &= 3S_{n+1} \\ \Leftrightarrow a_{n+1}^2 + 6a_{n+1} + 9 &= 12(S_n + a_{n+1}) \\ \Leftrightarrow a_{n+1}^2 - 6a_{n+1} + 9 - 12S_n &= 0 \\ \therefore a_{n+1} &= 3 \pm \sqrt{9 - 9 + 12S_n} = 3 \pm 2\sqrt{3S_n} \end{aligned}$$

であることが必要である。ここで、 $a_n > 0$ であり、 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k \geq a_1 = 3$ であるから、

$$a_{n+1} = 3 + 2\sqrt{3S_n}$$

となる。これは②を満たすから、十分性も満たす。

(答) $a_{n+1} = 3 + 2\sqrt{3S_n}$

(3)

$S_n = 3n^2$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき,

(1)より,

$$S_1 = a_1 = 3$$

だから、成り立つ。

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、 $n=k+1$ のとき,

(2)より,

$$a_{k+1} = 3 + 2\sqrt{3S_k} = 3 + 2\sqrt{3 \cdot 3k^2} = 3 + 6k$$

となるので,

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = 3k^2 + 3 + 6k = 3(k+1)^2$$

となり、 $n=k+1$ のときも成り立つ。

[1], [2]より、すべての自然数 n に対して $S_n = 3n^2$ が成り立つ。

(証明終)

3

(1)

底の条件より、 x は

$$\begin{aligned} x(1-x) &> 0 \\ \Leftrightarrow 0 < x < 1 \end{aligned}$$

を満たすことが必要である。また、 $0 < x < 1$ のとき、

$$x-x^2 = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

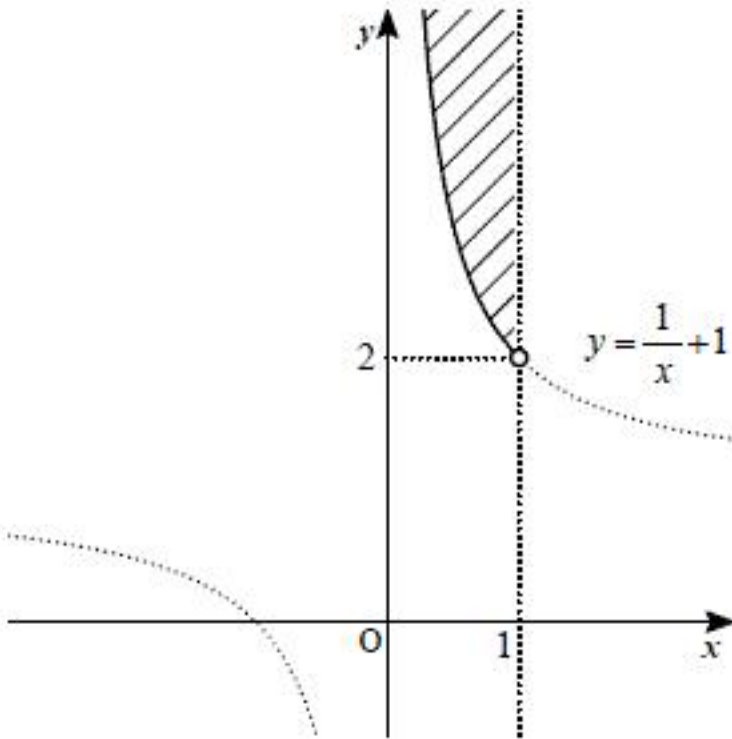
であるから、底 $x-x^2$ は

$$0 < x-x^2 \leq \frac{1}{4} < 1$$

を満たす。したがって、

$$\begin{aligned} \log_{x(1-x)}\{x(y-1)\} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \log_{x(1-x)}\{x(y-1)\} &\leq \log_{x(1-x)} 1 \\ \Leftrightarrow 0 < x < 1 \quad \text{かつ} \quad x(y-1) &\geq 1 \\ \Leftrightarrow 0 < x < 1 \quad \text{かつ} \quad y-1 &\geq \frac{1}{x} \\ \therefore 0 < x < 1 \quad \text{かつ} \quad y &\geq \frac{1}{x}+1 \end{aligned}$$

となる。以上より、 $\log_{x(1-x)}\{x(y-1)\} \leq 0$ を満たす領域は下図の斜線部である。(境界は $x=1$ の部分および白丸を除き、その他の境界部は含む)



(答) 前図参照

(2)

$2x+y=k$ とおくと、

$$y = -2x + k \quad \dots \textcircled{1}$$

と変形できる。 $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ とおくと、

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

であるから、 $y = \frac{1}{x} + 1$ の接線の傾き m は、 $0 < x < 1$ のとき、

$$m < -1$$

を満たす。したがって、(1)の図より、 $\textcircled{1}$ が $y = \frac{1}{x} + 1$ に接するとき、 k が最小となることが分かる。ここで、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x^2} &= -2 \\ \therefore x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\because 0 < x < 1) \end{aligned}$$

であり、接点の x 座標が $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のときの $y = \frac{1}{x} + 1$ の接線は、

$$\begin{aligned} y &= -2\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2} + 1 \\ &= -2x + 2\sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

であるから、 k の最小値は

$$2\sqrt{2} + 1$$

と求まる。

(答) $2\sqrt{2} + 1$

4

(1)

$$\int_0^1 f(t) dt = a, \int_{-1}^0 f(t) dt = b \cdots \textcircled{1} \text{とおくと,}$$

$$f(t) = \frac{3}{16}at^2 - \frac{3}{7}bt + 7$$

と表せる。これを①に代入すると,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \int_0^1 \left(\frac{3}{16}at^2 - \frac{3}{7}bt + 7 \right) dx = a \\ \int_{-1}^0 \left(\frac{3}{16}at^2 - \frac{3}{7}bt + 7 \right) dx = b \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\frac{1}{16}at^3 - \frac{3}{14}bt^2 + 7t \right]_0^1 = a \\ \left[\frac{1}{16}at^3 - \frac{3}{14}bt^2 + 7t \right]_{-1}^0 = b \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{16}a - \frac{3}{14}b + 7 = a \\ \frac{1}{16}a + \frac{3}{14}b + 7 = b \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{15}{16}a + \frac{3}{14}b - 7 = 0 \\ \frac{1}{16}a - \frac{11}{14}b + 7 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

と変形できる。これを解くと,

$$a = \frac{16}{3}, b = \frac{28}{3}$$

と求まる。以上より,

$$f(x) = x^2 - 4x + 7$$

である。

(答) $f(x) = x^2 - 4x + 7$

(2)

$$(x-1)g(x) = \int_0^x g(t) dt - \frac{2x^3}{3} + 2x^2 - 2x + 1 \cdots \textcircled{2}$$

$g(x) = px^2 + qx + r$ ($p \neq 0$) とおく。これを②に代入すると,

$$\begin{aligned} & (x-1)(px^2 + qx + r) = \int_0^x (pt^2 + qt + r) dt - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \\ & \Leftrightarrow px^3 + (q-p)x^2 + (r-q)x - r = \left[\frac{p}{3}t^3 + \frac{q}{2}t^2 + rt \right]_0^x - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \\ & \Leftrightarrow px^3 + (q-p)x^2 + (r-q)x - r = \left(\frac{p}{3} - \frac{2}{3} \right)x^3 + \left(\frac{q}{2} + 2 \right)x^2 + (r-2)x + 1 \end{aligned}$$

となる。上式は x の恒等式であるから、両辺係数比較すると,

$$\begin{cases} p = \frac{p}{3} - \frac{2}{3} \\ q - p = \frac{q}{2} + 2 \\ r - q = r - 2 \\ -r = 1 \end{cases}$$

となるので、これを解くと,

$$p = -1, q = 2, r = -1$$

となり、これは $p \neq 0$ を満たす。以上より,

$$g(x) = -x^2 + 2x - 1$$

となる。

(答) $g(x) = -x^2 + 2x - 1$

(3)

(1)より,

$$f'(x) = 2x - 4$$

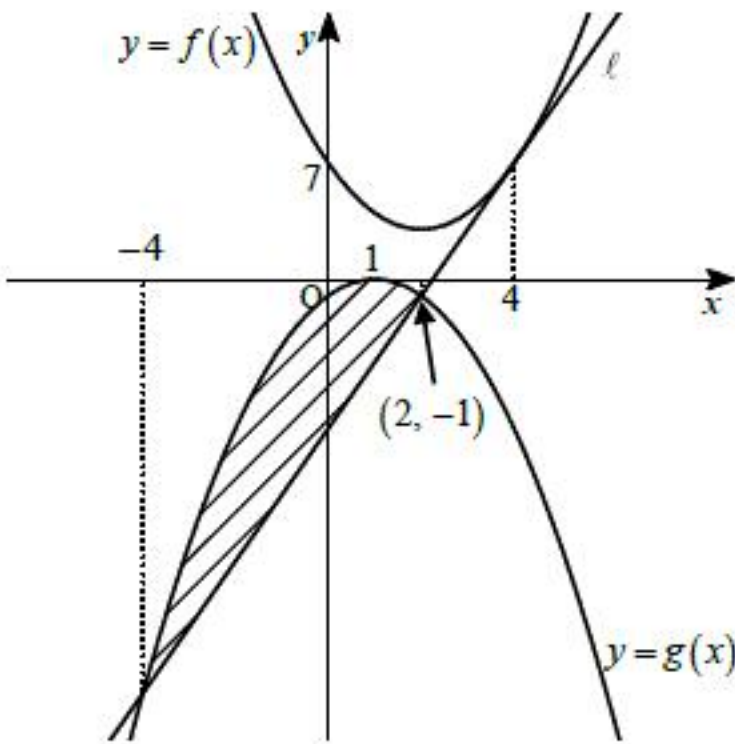
であるから,

$$\begin{aligned} \ell: y &= (2 \cdot 4 - 4)(x - 4) + 16 - 16 + 7 \\ &= 4x - 9 \end{aligned}$$

となる。 $y = g(x)$ と ℓ の交点を求めると,

$$\begin{aligned} & -x^2 + 2x - 1 = 4x - 9 \\ & \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \\ & \Leftrightarrow (x+4)(x-2) = 0 \\ & \therefore x = -4, 2 \end{aligned}$$

となるので、求める面積は下図の斜線部である。



求める面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^2 \{ (-x^2 + 2x - 1) - (4x - 9) \} dx \\ &= -\int_{-4}^2 (x+4)(x-2) dx \\ &= \frac{1}{6}(2+4)^3 \\ &= 36 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) 36