

数 学

（理工学部）

————— 解答上の注意事項 —————

- 1 「解答始め」の合図があるまで問題を見てはならない。
- 2 「解答始め」の合図があったら、初めにすべての解答紙の所定欄に受験番号を記入すること。
受験番号は算用数字で横書きとする。
- 3 問題冊子 1 冊と解答冊子 1 冊（解答紙 4 枚および計算紙 1 枚）がある。
- 4 問題は 1 から 4 まで 4 問ある。各問の解答は所定の解答紙に記入すること。
- 5 解答しない問題がある場合でも、解答紙 4 枚すべてを提出すること。
- 6 解答冊子の表紙および計算紙も提出すること。
- 7 問題冊子は持ち帰ること。

1 座標空間内で、原点 O , $A(1, 0, 0)$, $B(b_1, b_2, 0)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ を頂点とする正四面体を考える。ただし、 b_2 と c_3 は正とする。次の問いに答えよ。

(1) b_1 , b_2 および c_1 , c_2 , c_3 を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であることを示せ。

(3) P は直線 BC 上の点で、 $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であるとする。 P の座標を求めよ。また $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であることを示せ。

2 0以上の整数 n に対して、 $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ とおく。ただし、 $0! = 1$ とし、 e は自然対数の底とする。次の問いに答えよ。

(1) $n \geq 1$ のとき、 $f_n(x)$ の導関数を $f_n(x)$, $f_{n-1}(x)$ を用いて表せ。

(2) $\sum_{k=0}^n f_k(x)$ の導関数を求めよ。

(3) $\int_0^1 f_n(x) dx$ を求めよ。

(4) $e > \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ を示せ。

3

関数

$$f(x) = 2 \sin x \cos x - \tan x + 2x$$

について、次の問いに答えよ。

(1) 区間 $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ における $f(x)$ の最大値および最小値を求めよ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$ とで囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ。

- 4 サイコロを4回投げて、1, 2, 3, 4回目に出た目をそれぞれ a, b, c, d とするとき、行列 A を

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

で定める。次の問いに答えよ。

- (1) $A^2 - (a - d)A - (ad - bc)E = O$ を示せ。ただし、 E, O はそれぞれ2次の単位行列、零行列とする。
- (2) n を2以上の自然数とすると、 $A^n = O$ が成り立つための必要十分条件は、 $ad = bc$ および $a = d$ が成り立つことである。これを示せ。
- (3) n を2以上の自然数とする。 $A^n = O$ となる確率を求めよ。