

1

(1)

与式より $a \neq 0, b \neq 0$ である。両辺に $ab (\neq 0)$ をかけて整理すると

$$a^2b + b = ab^2 + a$$

$$\Leftrightarrow (ab-1)(a-b) = 0$$

$$\therefore a = b \text{ または } a = \frac{1}{b}$$

となる。

$$(\text{答}) \ a = b \text{ または } a = \frac{1}{b}$$

(2)

与式より

$$x + \frac{1}{x} = \frac{y}{8} + \frac{8}{y} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①と(1)の結果より

$$x = \frac{y}{8} \text{ または } \frac{8}{y}$$

となり、②と(1)の結果より

$$y = 1 \text{ または } y = x^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。

$$[1] \ x = \frac{y}{8} \text{ のとき}$$

③より

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = \frac{1}{8} \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y = 8x \\ 8x = x^2 \end{cases}$$

となる。 $x \neq 0$ より、これを整理して

$$(x, y) = \left(\frac{1}{8}, 1 \right), (8, 64)$$

となる。

$$[2] \ x = \frac{8}{y} \text{ のとき}$$

③より

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 8 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} xy = 8 \\ x^3 = 8 \end{cases}$$

となるから、これを整理して

$$(x, y) = (8, 1), (2, 4)$$

となる。

以上[1], [2]により,

$$(x, y) = \left(\frac{1}{8}, 1 \right), (8, 64), (8, 1), (2, 4)$$

である。

$$(\text{答}) \ (x, y) = \left(\frac{1}{8}, 1 \right), (8, 64), (8, 1), (2, 4)$$

(1)

以下合同式を用いる。仮定より

$$\begin{aligned} N-M &= 999a+90b-90c-999d \\ &= 9(111a+10b-10c-111d) \\ &\equiv 0 \pmod{9} \end{aligned}$$

となるから、 $N-M$ は9で割り切れる。

(証明終)

(2)

(1)より、

$$N-M \text{ が } 18 \text{ の倍数である} \Leftrightarrow 111a+10b-10c-111d \text{ が } 2 \text{ の倍数である}$$

ということである。ここで

$$111a+10b-10c-111d \equiv a-d \pmod{2}$$

であるから、 $111a+10b-10c-111d$ が2の倍数であることと、 $a-d$ が2の倍数であることは同値である。 a と d の偶奇が一致するときに条件は満たされるから、求める確率は

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

である。

(答) $\frac{1}{2}$

(3)

仮定より

$$\begin{aligned} N-M &= 999a+90b-90c-999d \\ &= (27a-27d) \times 37 + (b-c) \times 90 \\ &\equiv (b-c) \times 90 \pmod{37} \end{aligned}$$

となる。ここで90と37は互いに素であるから、 $N-M$ が37の倍数になることと、 $b-c$ が37の倍数であることは同値である。これを満たす条件は

$$\begin{aligned} b-c &= 0 \\ \therefore b &= c \end{aligned}$$

のみであるから、求める確率は

$$\frac{1}{6}$$

である。

(答) $\frac{1}{6}$

この答えは、等式

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

が成り立つことを利用している。つまり11から n 個の奇数を引くというのは $11-n^2$ を計算していることになる。 $11-n^2$ が負にならないような最大の n は、不等式

$$n^2 \leq 11 < (n+1)^2$$

を満たすから、 n が正であることに注意すると $n \leq \sqrt{11} < n+1$ となる。このようにして解を得たということになる。

(説明終)

(1)

与えられた放物線の式 $y = x^2$ を x について微分すると $y' = 2x$ であるから、点 (b, b^2) における円と放物線の共通接線の傾きは $2b$ である。円の接線と、接点から中心に引いた直線は直角に交わるから、円の中心と点 (b, b^2) を結ぶ直線の傾きは $-\frac{1}{2b}$ となる。一方で、円の中心 $(0, a)$ と点 (b, b^2) から、円の中心と点 (b, b^2) を結ぶ直線の傾きは

$$\frac{b^2 - a}{b}$$

と表せるから、

$$\frac{b^2 - a}{b} = -\frac{1}{2b}$$

$$\therefore a = b^2 + \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、 r は円の中心と点 (b, b^2) の距離に等しいから

$$r = \sqrt{b^2 + (a - b^2)^2}$$

である。これに①式を代入して整理すると

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{b^2 + (a - b^2)^2} \\ &= \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \text{ 直線の傾き: } -\frac{1}{2b}, \text{ 円の半径: } r = \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}}$$

(2)

$r = 1$ から

$$r = \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\Leftrightarrow b^2 + \frac{1}{4} = 1$$

$$\therefore b = \frac{\sqrt{3}}{2} (>0)$$

となる。また①式より

$$\begin{aligned} a &= b^2 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

である。また、円の中心と点 (b, b^2) を結ぶ直線の傾きは(1)より

$$-\frac{1}{2b} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

となる。よってこの直線と x 軸のなす角度 θ は

$$\begin{aligned} \tan \theta &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \therefore \theta &= 150^\circ \end{aligned}$$

となる。よって円の中心、放物線との二接点の三点がなす角は 120° である。また、求める面積は、放物線 $y = x^2$ と直線 $y = b^2$ が囲む面積から、円と直線 $y = b^2$ が囲む面積を引いたものである。まず、放物線 $y = x^2$ と直線 $y = b^2$ が囲む面積は

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{3}{4} - x^2 \right) dx &= \frac{1}{6} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

である。円と直線 $y = b^2$ が囲む面積は、半径 1、中心角 120° の扇形から、円の中心、放物線との二接点の三点がなす三角形の面積を引いたものであるから、

$$\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{120}{360} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 120^\circ = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

となる。よって求める面積は

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

(3)

円 $x^2 + (y - a)^2 = r^2$ と放物線 $y = x^2$ の共有点が一点となるような r の条件を求めればよい。

$$\begin{cases} x^2 + (y - a)^2 = r^2 & \dots \textcircled{2} \\ y = x^2 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

連立方程式②、③の解が $(0, 0)$ のみになるような r の条件を求める。 x を消去すると、

$$\begin{aligned} (y - a)^2 + y &= r^2 \\ \Leftrightarrow y^2 + (1 - 2a)y + a^2 - r^2 &= 0 \end{aligned}$$

となるから、 $y = 0$ が解であるための条件は、

$$\begin{aligned} a^2 - r^2 &= 0 \\ \therefore r &= a \quad (r, a > 0) \end{aligned}$$

であり、このとき $x = 0$ である。さらにこのとき、連立してできた 2 次方程式において

$$y = 2a - 1 = 2r - 1$$

がもう一つの解となるが、③より

$$\begin{aligned} 2r - 1 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow r &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

のとき連立方程式②、③は $(0, 0)$ 以外の解を持たない。よって、求める条件は

$$r = a \text{ かつ } 0 < r \leq \frac{1}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad r = a \text{ かつ } 0 < r \leq \frac{1}{2}$$