

1

(1)

$\triangle OAB$ は 1 辺の長さが 2 の正三角形であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} &= 2 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 2\end{aligned}$$

である。

(答) 2

(2)

点 P, Q はそれぞれ線分 OA, OB を 1:3, 3:1 に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \frac{3}{4}\overrightarrow{b}\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad -\frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \frac{3}{4}\overrightarrow{b}$$

(3)

(1), (2) より, 線分 PQ の長さは

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \frac{3}{4}\overrightarrow{b}\right)^2} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2 - 6\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + 9|\overrightarrow{b}|^2} \\ &= \frac{\sqrt{7}}{2}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) \quad |\overrightarrow{PQ}| = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

(4)

点 R は線分 AC と線分 PQ の交点であるから, 実数 s, t を用いて $\overrightarrow{OR}$ を二通りの方法で表すと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= s\overrightarrow{OP} + (1-s)\overrightarrow{OQ} \\ &= t\overrightarrow{a} + (1-t)\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

となる。 $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の一次独立性に注意してこれを整理すると, 係数比較が行えて

$$\begin{aligned}s\overrightarrow{OP} + (1-s)\overrightarrow{OQ} &= t\overrightarrow{a} + (1-t)\overrightarrow{OC} \\ \Leftrightarrow \frac{s}{4}\overrightarrow{a} + \frac{3(1-s)}{4}\overrightarrow{b} &= t\overrightarrow{a} + \frac{(1-t)}{2}\overrightarrow{b} \\ \therefore \begin{cases} \frac{s}{4} = t \\ \frac{3(1-s)}{4} = \frac{(1-t)}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

となる。この連立方程式を解くと

$$(s, t) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{10}\right)$$

となる。よって

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{10}\overrightarrow{a} + \frac{9}{20}\overrightarrow{b}$$

と表せる。

$$(答) \quad \overrightarrow{OR} = \frac{1}{10}\overrightarrow{a} + \frac{9}{20}\overrightarrow{b}$$

(1)

倍角の公式より

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan 2\theta} &= \frac{1}{2 \tan \theta} - \frac{\tan \theta}{2} \\ \therefore \frac{\tan \theta}{2} &= \frac{1}{2 \tan \theta} - \frac{1}{\tan 2\theta} \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

(1)より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan \frac{1}{2^k} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2^k \tan \frac{1}{2^k}} - \frac{1}{2^{k-1} \tan \frac{1}{2^{k-1}}} \right) \\ &= \frac{1}{2^n \tan \frac{1}{2^n}} - \frac{1}{\tan 1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2^n \tan \frac{1}{2^n}} - \frac{1}{\tan 1}$$

(3)

 $\theta = \frac{1}{2^n}$ とおく。(2)より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n \tan \frac{1}{2^n}} - \frac{1}{\tan 1} \right) &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\theta}{\tan \theta} - \frac{1}{\tan 1} \right) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\theta}{\sin \theta} \cdot \cos \theta - \frac{1}{\tan 1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\tan 1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 1 - \frac{1}{\tan 1}$$

(1)

与えられた関数

$$f(x) = (ax + b)e^{-x}$$

を微分すると

$$f'(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x}$$

となるから、題意より

$$f(0) = b = 2$$

$$f'(0) = a - b = 2$$

$$\therefore (a, b) = (4, 2)$$

となる。

(答) $(a, b) = (4, 2)$

(2)

(1)より

$$\begin{aligned} f'(x) &= ae^{-x} - (ax + b)e^{-x} \\ &= 4e^{-x} - (4x + 2)e^{-x} \\ &= -4\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x} \end{aligned}$$

となるから、 $f'(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ の前後で符号が正から負に変わるため $f(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ で極値(極大値)を取る。このときの極値(極大値)は

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{a}{2} + b\right)e^{-\frac{1}{2}} \\ &= 4e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

となる。

(答) 極大値 $4e^{-\frac{1}{2}}$ ($x = \frac{1}{2}$ のとき)

(3)

 $0 \leq x \leq 1$ の範囲で $f(x) > 0$ であるから、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^1 (4x + 2)e^{-x} dx &= \left[-(4x + 2)e^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 4e^{-x} dx \\ &= -\frac{6}{e} + 2 - 4[e^{-x}]_0^1 \\ &= 6 - \frac{10}{e} \end{aligned}$$

となる。

(答) $6 - \frac{10}{e}$

(1)

点Pにおける曲線Cの接線は

$$\begin{aligned} y &= \alpha p^{\alpha-1}(x-p) + p^\alpha \\ &= \alpha p^{\alpha-1}x + (1-\alpha)p^\alpha \end{aligned}$$

となる。よってこれに $x=0$ を代入することにより、点Qの y 座標は

$$y = (1-\alpha)p^\alpha$$

となる。

(答) $(1-\alpha)p^\alpha$

(2)

$R(r, 0)$ とおく。仮定より

$$PR = PQ$$

$$PR^2 = (p-r)^2 + p^{2\alpha}$$

$$PQ^2 = p^2 + \{p^\alpha - (1-\alpha)p^\alpha\}^2$$

であるから、これらを整理すると

$$\begin{aligned} (p-r)^2 + p^{2\alpha} &= p^2 + \{p^\alpha - (1-\alpha)p^\alpha\}^2 \\ &= p^2 + \alpha^2 p^{2\alpha} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow r^2 - 2pr + (1-\alpha^2)p^{2\alpha} = 0$$

$$\therefore r = p \pm \sqrt{p^2 - (1-\alpha^2)p^{2\alpha}} \quad (\because \alpha > 1)$$

となる。だが仮定より $r < p$ であるのでRの x 座標は

$$p - \sqrt{p^2 - (\alpha^2 - 1)p^{2\alpha}}$$

となる。

(答) $p - \sqrt{p^2 - (\alpha^2 - 1)p^{2\alpha}}$

(3)

(2)より、直線PRの傾きは

$$\frac{p^\alpha}{\sqrt{p^2 - (1-\alpha^2)p^{2\alpha}}}$$

となるから、

$$\tan \theta = \frac{p^\alpha}{\sqrt{p^2 - (1-\alpha^2)p^{2\alpha}}}$$

である。よって $\lim_{p \rightarrow \infty} \theta = \frac{\pi}{4}$ を満たすとき、 $\tan$ の連続性より

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p^\alpha}{\sqrt{p^2 - (1-\alpha^2)p^{2\alpha}}} = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。一方で

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p^\alpha}{\sqrt{p^2 - (1-\alpha^2)p^{2\alpha}}} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{p^{2-2\alpha} + \alpha^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \quad (\because \alpha > 1) \end{aligned}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} &= 1 \\ \therefore \alpha &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\alpha = \sqrt{2}$