

(1)

与式より $a \neq 0, b \neq 0$ である。与式の両辺に $ab (\neq 0)$ をかけて整理すると

$$a^2b + b = ab^2 + a$$

$$\Leftrightarrow (ab-1)(a-b)=0$$

$$\therefore a=b \text{ または } a=\frac{1}{b}$$

となる。

$$(\text{答}) \ a=b \text{ または } a=\frac{1}{b}$$

(2)

与式より

$$x + \frac{1}{x} = \frac{y}{8} + \frac{8}{y} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①と(1)の結果より

$$x = \frac{y}{8} \text{ または } \frac{8}{y}$$

となり、②と(1)の結果より

$$y=1 \text{ または } y=x^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。

[1] $x = \frac{y}{8}$ のとき

③より

$$\begin{cases} y=1 \\ x=\frac{1}{8} \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y=8x \\ 8x=x^2 \end{cases}$$

となる。 $x \neq 0$ より、これを整理して

$$(x, y) = \left(\frac{1}{8}, 1 \right), (8, 64)$$

となる。

[2] $x = \frac{8}{y}$ のとき

③より

$$\begin{cases} y=1 \\ x=8 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} xy=8 \\ x^3=8 \end{cases}$$

となるから、これを整理して

$$(x, y) = (8, 1), (2, 4)$$

となる。

以上[1], [2]により、

$$(x, y) = \left(\frac{1}{8}, 1 \right), (8, 64), (8, 1), (2, 4)$$

である。

$$(\text{答}) \ (x, y) = \left(\frac{1}{8}, 1 \right), (8, 64), (8, 1), (2, 4)$$

2

(1)

$\triangle OAB$ は 1 辺の長さが 2 の正三角形であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} &= 2 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 2\end{aligned}$$

である。

(答) 2

(2)

点 P, Q はそれぞれ線分 OA, OB を 1:3, 3:1 に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \frac{3}{4}\overrightarrow{b}\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad -\frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \frac{3}{4}\overrightarrow{b}$$

(3)

(1), (2) より, 線分 PQ の長さは

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \frac{3}{4}\overrightarrow{b}\right)^2} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2 - 6\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + 9|\overrightarrow{b}|^2} \\ &= \frac{\sqrt{7}}{2}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) \quad |\overrightarrow{PQ}| = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

(4)

点 R は線分 AC と線分 PQ の交点であるから, 実数 s, t を用いて $\overrightarrow{OR}$ を二通りの方法で表すと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= s\overrightarrow{OP} + (1-s)\overrightarrow{OQ} \\ &= t\overrightarrow{a} + (1-t)\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

となる。 $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の一次独立性に注意してこれを整理すると, 係数比較が行えて

$$\begin{aligned}s\overrightarrow{OP} + (1-s)\overrightarrow{OQ} &= t\overrightarrow{a} + (1-t)\overrightarrow{OC} \\ \Leftrightarrow \frac{s}{4}\overrightarrow{a} + \frac{3(1-s)}{4}\overrightarrow{b} &= t\overrightarrow{a} + \frac{(1-t)}{2}\overrightarrow{b} \\ \therefore \begin{cases} \frac{s}{4} = t \\ \frac{3(1-s)}{4} = \frac{(1-t)}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

となる。この連立方程式を解くと

$$(s, t) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{10}\right)$$

となる。よって

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{10}\overrightarrow{a} + \frac{9}{20}\overrightarrow{b}$$

と表せる。

$$(答) \quad \overrightarrow{OR} = \frac{1}{10}\overrightarrow{a} + \frac{9}{20}\overrightarrow{b}$$

(1)

三角関数の倍角の公式より,

$$\begin{aligned}
 \cos 2\beta &= 1 - 2\sin^2 \beta \\
 \cos 4\beta &= 2\cos^2 2\beta - 1 \\
 &= 2(1 - 2\sin^2 \beta)^2 - 1 \\
 &= 8\sin^4 \beta - 8\sin^2 \beta + 1
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \cos 2\beta = 1 - 2\sin^2 \beta, \quad \cos 4\beta = 8\sin^4 \beta - 8\sin^2 \beta + 1$$

(2)

(1)より,

$$\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2 \beta$$

であるから, これに対して $\alpha + 2\beta = 90^\circ$, $\sin \alpha = 2\sin^2 \beta$ を用いて変形すると,

$$\begin{aligned}
 \cos(90^\circ - \alpha) &= 1 - \sin \alpha \\
 \Leftrightarrow \sin \alpha &= 1 - \sin \alpha \\
 \therefore \sin \alpha &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

(3)

(1)より

$$\cos 4\beta = 8\sin^4 \beta - 8\sin^2 \beta + 1$$

であるから, これに対して $\alpha + 4\beta = 90^\circ$, $\sin \alpha = 2\sin^2 \beta$ を用いて変形すると,

$$\begin{aligned}
 \cos(90^\circ - \alpha) &= 2\sin^2 \alpha - 4\sin \alpha + 1 \\
 \Leftrightarrow 2\sin^2 \alpha - 5\sin \alpha + 1 &= 0 \\
 \therefore \sin \alpha &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}
 \end{aligned}$$

となるが, $0 \leq \sin \alpha \leq 1$ ($\because 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$)より,

$$\sin \alpha = \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sin \alpha = \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$$

(1)

与えられた放物線の式 $y = x^2$ を x について微分すると $y' = 2x$ であるから、点 (b, b^2) における円と放物線の共通接線の傾きは $2b$ である。円の接線と、接点から中心に引いた直線は直角に交わるから、円の中心と点 (b, b^2) を結ぶ直線の傾きは $-\frac{1}{2b}$ となる。一方で、円の中心 $(0, a)$ と点 (b, b^2) から、円の中心と点 (b, b^2) を結ぶ直線の傾きは

$$\frac{b^2 - a}{b}$$

と表せるから、

$$\frac{b^2 - a}{b} = -\frac{1}{2b}$$

$$\therefore a = b^2 + \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、 r は円の中心と点 (b, b^2) の距離に等しいから

$$r = \sqrt{b^2 + (a - b^2)^2}$$

である。これに①式を代入して整理すると

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{b^2 + (a - b^2)^2} \\ &= \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \text{ 直線の傾き: } -\frac{1}{2b}, \text{ 円の半径: } r = \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}}$$

(2)

$r=1$ から

$$r = \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\Leftrightarrow b^2 + \frac{1}{4} = 1$$

$$\therefore b = \frac{\sqrt{3}}{2} (>0)$$

となる。また①式より

$$\begin{aligned} a &= b^2 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

である。また、円の中心と点 (b, b^2) を結ぶ直線の傾きは(1)より

$$-\frac{1}{2b} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

となる。よってこの直線と x 軸のなす角度 θ は

$$\begin{aligned} \tan \theta &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \therefore \theta &= 150^\circ \end{aligned}$$

となる。よって円の中心、放物線との二接点の三点がなす角は 120° である。また、求める面積は、放物線 $y = x^2$ と直線 $y = b^2$ が囲む面積から、円と直線 $y = b^2$ が囲む面積を引いたものである。まず、放物線 $y = x^2$ と直線 $y = b^2$ が囲む面積は

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{3}{4} - x^2 \right) dx &= \frac{1}{6} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

である。円と直線 $y = b^2$ が囲む面積は、半径 1、中心角 120° の扇形から、円の中心、放物線との二接点の三点がなす三角形の面積を引いたものであるから、

$$\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{120}{360} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 120^\circ = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

となる。よって求める面積は

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

(3)

円 $x^2 + (y-a)^2 = r^2$ と放物線 $y = x^2$ の共有点が一点となるような r の条件を求めればよい。

$$\begin{cases} x^2 + (y-a)^2 = r^2 & \dots \textcircled{2} \\ y = x^2 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

連立方程式②、③の解が $(0, 0)$ のみになるような r の条件を求める。 x を消去すると、

$$\begin{aligned} (y-a)^2 + y &= r^2 \\ \Leftrightarrow y^2 + (1-2a)y + a^2 - r^2 &= 0 \end{aligned}$$

となるから、 $y=0$ が解であるための条件は、

$$\begin{aligned} a^2 - r^2 &= 0 \\ \therefore r &= a \quad (r, a > 0) \end{aligned}$$

であり、このとき $x=0$ である。さらにこのとき、連立してできた 2 次方程式において

$$y = 2a - 1 = 2r - 1$$

がもう一つの解となるが、③より

$$2r - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow r \leq \frac{1}{2}$$

のとき連立方程式②、③は $(0, 0)$ 以外の解を持たない。よって、求める条件は

$$r = a \text{ かつ } 0 < r \leq \frac{1}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad r = a \text{ かつ } 0 < r \leq \frac{1}{2}$$