

1

(1)

倍角の公式より

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan 2\theta} &= \frac{1}{2 \tan \theta} - \frac{\tan \theta}{2} \\ \therefore \frac{\tan \theta}{2} &= \frac{1}{2 \tan \theta} - \frac{1}{\tan 2\theta} \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

(1)より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan \frac{1}{2^k} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2^k \tan \frac{1}{2^k}} - \frac{1}{2^{k-1} \tan \frac{1}{2^{k-1}}} \right) \\ &= \frac{1}{2^n \tan \frac{1}{2^n}} - \frac{1}{\tan 1} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2^n \tan \frac{1}{2^n}} - \frac{1}{\tan 1}$

(3)

$\theta = \frac{1}{2^n}$ とおく。(2)より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n \tan \frac{1}{2^n}} - \frac{1}{\tan 1} \right) &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\theta}{\tan \theta} - \frac{1}{\tan 1} \right) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\theta}{\sin \theta} \cdot \cos \theta - \frac{1}{\tan 1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\tan 1} \end{aligned}$$

となる。

(答) $1 - \frac{1}{\tan 1}$

(1)

点Pにおける曲線Cの接線は

$$\begin{aligned} y &= \alpha p^{\alpha-1}(x-p) + p^\alpha \\ &= \alpha p^{\alpha-1}x + (1-\alpha)p^\alpha \end{aligned}$$

となる。よってこれに $x=0$ を代入することにより、点Qの y 座標は

$$y = (1-\alpha)p^\alpha$$

となる。

(答) $(1-\alpha)p^\alpha$

(2)

$R(r, 0)$ とおく。仮定より

$$PR = PQ$$

$$PR^2 = (p-r)^2 + p^{2\alpha}$$

$$PQ^2 = p^2 + \{p^\alpha - (1-\alpha)p^\alpha\}^2$$

であるから、これらを整理すると

$$\begin{aligned} (p-r)^2 + p^{2\alpha} &= p^2 + \{p^\alpha - (1-\alpha)p^\alpha\}^2 \\ &= p^2 + \alpha^2 p^{2\alpha} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow r^2 - 2pr + (1-\alpha^2)p^{2\alpha} = 0$$

$$\therefore r = p \pm \sqrt{p^2 - (1-\alpha^2)p^{2\alpha}} \quad (\because \alpha > 1)$$

となる。だが仮定より $r < p$ であるのでRの x 座標は

$$p - \sqrt{p^2 - (\alpha^2 - 1)p^{2\alpha}}$$

となる。

(答) $p - \sqrt{p^2 - (\alpha^2 - 1)p^{2\alpha}}$

(3)

(2)より、直線PRの傾きは

$$\frac{p^\alpha}{\sqrt{p^2 - (1-\alpha^2)p^{2\alpha}}}$$

となるから、

$$\tan \theta = \frac{p^\alpha}{\sqrt{p^2 - (1-\alpha^2)p^{2\alpha}}}$$

である。よって $\lim_{p \rightarrow \infty} \theta = \frac{\pi}{4}$ を満たすとき、 $\tan$ の連続性より

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p^\alpha}{\sqrt{p^2 - (1-\alpha^2)p^{2\alpha}}} = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。一方で

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p^\alpha}{\sqrt{p^2 - (1-\alpha^2)p^{2\alpha}}} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{p^{2-2\alpha} + \alpha^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \quad (\because \alpha > 1) \end{aligned}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} &= 1 \\ \therefore \alpha &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\alpha = \sqrt{2}$

3

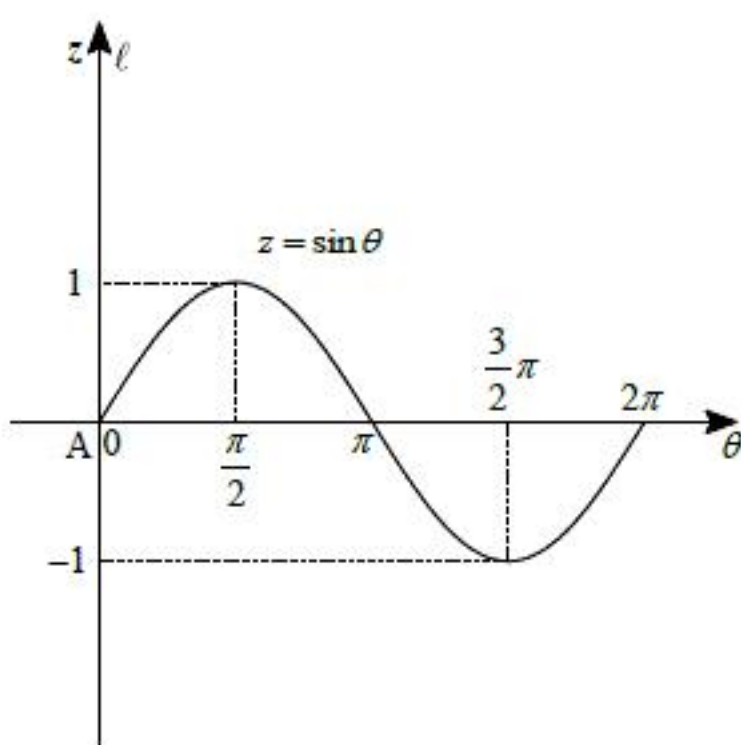
(1)

点 Q の座標は $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ であり、平面 α 上の点は $y = z$ を満たすから $PQ = \sin \theta$ である。
 よって、点 P の座標は $(\cos \theta, \sin \theta, \sin \theta)$ である。

(答) $(\cos \theta, \sin \theta, \sin \theta)$

(2)

弧 AQ の長さは θ であり、このとき点 P の z 座標は $\sin \theta$ である。したがって、円周に沿って θ 軸を取ると曲線 C の概形は下図のように $z = \sin \theta$ となる。



(答) 前図

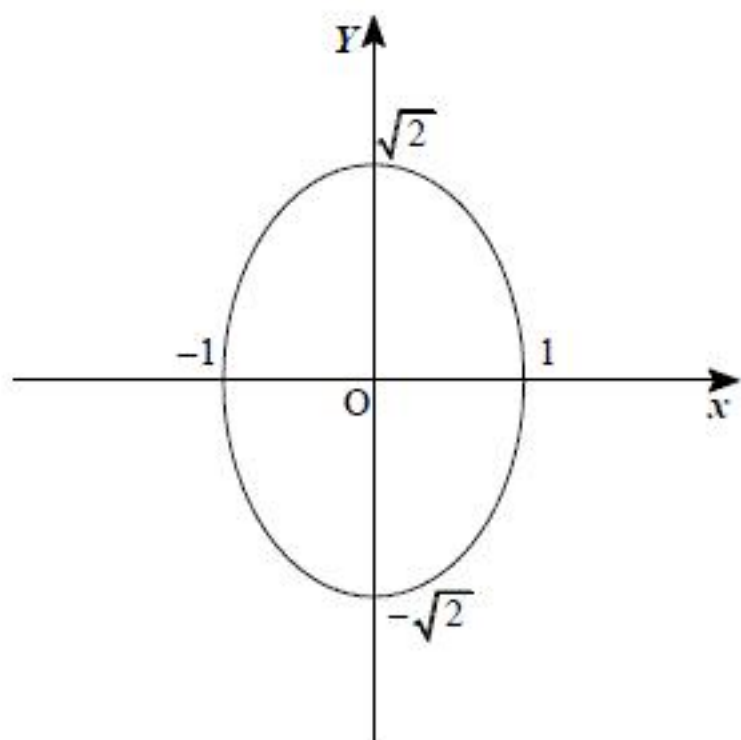
(3)

平面 α は xy 平面と成す角が $\frac{\pi}{4}$ であるから、点 P は xY 平面上で $(\cos \theta, \sqrt{2} \sin \theta)$ と表される。

よって求める方程式は、

$$x^2 + \left(\frac{Y}{\sqrt{2}} \right)^2 = 1$$

となり、下図のような長軸 $\sqrt{2}$ 、短軸 1 の楕円を表す。



(答) 概形:前図, 方程式: $x^2 + \left(\frac{Y}{\sqrt{2}} \right)^2 = 1,$

(1)

与えられた関数

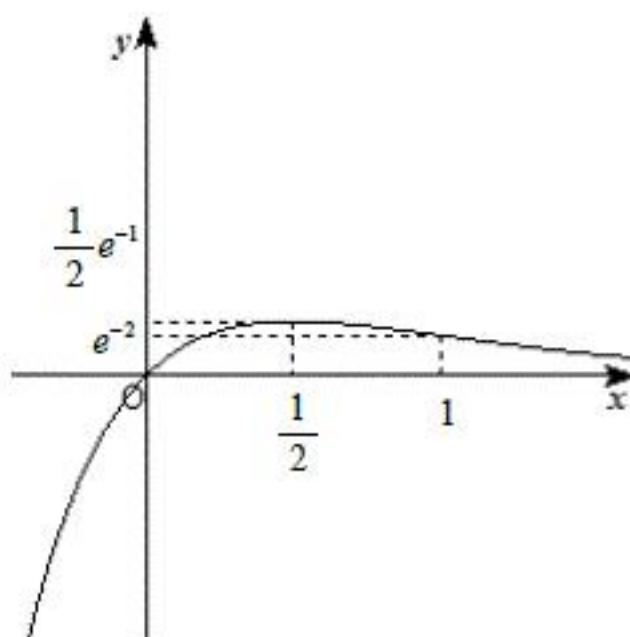
$$f(x) = xe^{-2x}$$

を微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-2x} - 2xe^{-2x} \\ &= (1-2x)e^{-2x} \end{aligned}$$

となるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$\frac{1}{2}$	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	$-e^{-2}$	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}e^{-1}$	$\searrow$	e^{-2}	$\searrow$

これと $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ から、グラフは下図のようになる。

(答) 前図

(2)

(1)より、 ℓ の傾きは $-e^{-2}$ で接点は $(1, e^{-2})$ である。よって ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -e^{-2}(x-1) + e^{-2} \\ &= -e^{-2}x + 2e^{-2} \end{aligned}$$

である。

(答) 接点: $(1, e^{-2})$, 接線: $y = -e^{-2}x + 2e^{-2}$

(3)

 $g(x) = -e^{-2}x + 2e^{-2} - f(x)$ とおく。 $x < 1$ において $g(x) > 0$ であることを示せばよい。ここで、

$$\begin{aligned} g'(x) &= -e^{-2} - e^{-2x} + 2xe^{-2x} \\ &= (2x-1)e^{-2x} - e^{-2} \\ g''(x) &= 2e^{-2x} - 2(2x-1)e^{-2x} \\ &= 4(1-x)e^{-2x} \end{aligned}$$

であるから、 $x < 1$ において $g''(x) > 0$ である。よって $g'(x)$ は単調増加関数であり、また、 $g'(1) = 0$ であるから、 $x < 1$ において $g'(x) < 0$ である。したがって $g(x)$ は単調減少関数である。さらに $g(1) = 0$ であるから、 $x < 1$ において $g(x) > 0$ である。よって題意は示された。

(証明終)

(4)

(3)より、 $0 \leq x \leq 1$ において $\ell > g(x)$ であるから、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (-e^{-2}x + 2e^{-2} - xe^{-2x}) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}e^{-2}x^2 + 2e^{-2}x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}xe^{-2x} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx \\ &= 2e^{-2} + \frac{1}{4} [e^{-2x}]_0^1 \\ &= \frac{9}{4}e^{-2} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $S = \frac{9}{4}e^{-2} - \frac{1}{4}$