

数 学

（理工学部）

————— 解答上の注意事項 —————

1. 「解答始め」の合図があるまで問題を見てはならない。
2. 「解答始め」の合図があったら、初めにすべての解答紙の所定欄に受験番号を記入すること。
受験番号は算用数字で横書きとする。
3. 問題冊子 1 冊と解答冊子 1 冊（解答紙 4 枚および計算紙 1 枚）がある。
4. 問題は 1 から 4 まで 4 問ある。各問の解答は所定の解答紙に記入すること。
5. 解答しない問題がある場合でも、解答紙 4 枚すべてを提出すること。
6. 解答冊子の表紙および計算紙も提出すること。
7. 問題冊子は持ち帰ること。

1 一辺の長さが2の正三角形 OAB において, 線分 OA を 1 : 3 に内分する点を P, 線分 OB を 3 : 1 に内分する点を Q とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき, 次の問に答えよ。

(1) $\vec{a}, \vec{b}$ の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{PQ}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。

(3) 線分 PQ の長さを求めよ。

(4) 線分 OB の中点を C とし, 線分 AC と線分 PQ の交点を R とする。 $\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。

2 $a_n = \frac{1}{2^n} \tan \frac{1}{2^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ とする。このとき、次の間に答えよ。

(1) $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ のとき、等式 $\frac{1}{2} \tan \theta = \frac{1}{2 \tan \theta} - \frac{1}{\tan 2\theta}$ を示せ。

(2) (1) を用いて、和 $\sum_{k=1}^n a_k$ を求めよ。

(3) 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ の和を求めよ。

3 定数 a, b と自然対数の底 e に対して, $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ とおく。曲線 $y = f(x)$ は点 $(0, 2)$ を通り, その点における接線の傾きは 2 であるとする。このとき, 次の問に答えよ。

- (1) a, b の値を求めよ。
- (2) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ。
- (3) $0 \leq x \leq 1$ の範囲において, 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

4 $\alpha > 1$ とする。曲線 $C: y = x^\alpha$ ($x > 0$) 上の点 $P(p, p^\alpha)$ における C の接線と y 軸の交点を Q とし、 x 軸上に点 R を $PR = PQ$ をみたすようにとる。ただし、点 R の x 座標は点 P の x 座標より小さいものとする。このとき、次の問に答えよ。

(1) 点 Q の y 座標を求めよ。

(2) 点 R の x 座標を求めよ。

(3) x 軸と直線 RP のなす鋭角を θ とするとき、 $\lim_{p \rightarrow \infty} \theta = \frac{\pi}{4}$ をみたす α の値を求めよ。